

Jsou draci nevypočitatelní?

Výzkumná zpráva z matematiky

Tereza Böhmová

2021

Obsah

1. Úvod.....	3
2. Krabičky a kostky.....	4
3. Hranaté obsahy.....	7
4. Kruhy.....	10
5. Válce a složitější tvary.....	16
6. Povrchy a sítě.....	19
7. Platónská tělesa a jejich povrchy.....	21
8. Jak vyměřit draka.....	32
9. Závěr.....	34

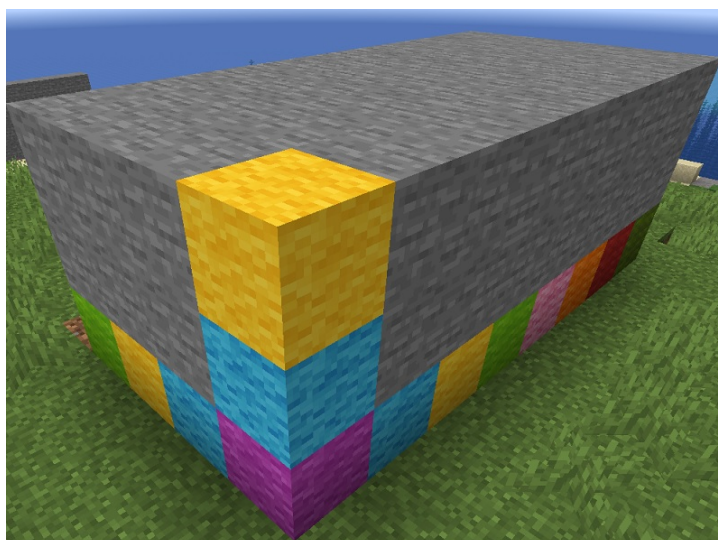
1. Úvod

Minecraft je svět složený z kostek, ze kterých je někdy třeba něco postavit. Pro stavbu je důležité vědět, z kolika kostek (bloků) chci postavit třeba hradbu. Když chci získat počet bloků potřebný pro stavbu hradby o velikosti 5 krát 10 bloků, musím vynásobit jednu stranu druhou. V tomto případě je to 5 krát 10, to se rovná 50, tedy budu pro stavbu potřebovat 50 bloků.



Obdélník o rozměrech 5 krát 10 bloků

Někdy ale musím stavět trojrozměrně, teď budu stavět kvádr o velikosti 8 krát 4 krát 3. Když chci získat počet bloků, budu postupovat stejně jako v prvním případě, akorát nebudu násobit se sebou dvě strany, ale tři. U mého kvádru to bude 8 krát 4 krát 3, to se rovná 96 bloků.



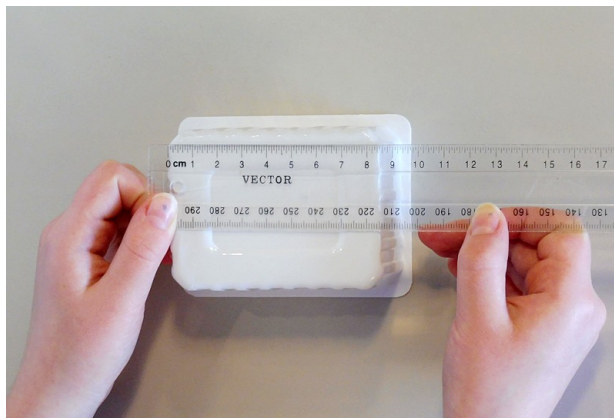
Kvádr o rozměrech 8 krát 4 krát 3 bloky

Když jsem mimo Minecraft a chci spočítat třeba plochu papíru A4, postupuji úplně stejně, jen místo bloků počítám centimetry. Když počítám s rozměry 30 krát 21 cm, je obsah 630 centimetrů čtverečních (čtverečních, protože počítám na placce). A to samé u krabiček – když mám krabičku 10 krát 16 krát 4, rozměry mezi sebou vynásobím a mám výsledek 640 centimetrů krychlových (krychlových, protože počítám trojrozměrný předmět).

2. Krabičky a kostky

Když chci spočítat objem krabičky nebo kostky, změřím její šířku, délku a výšku a vynásobím je mezi sebou:

$$V = \text{šířka} \cdot \text{délka} \cdot \text{výška}$$



Výsledky je ale třeba ověřit. Na to mám pro krabičky jednoduchou metodu – vezmu odměrku, naliji s ní do krabičky vodu, do **prázdné** odměrky naliji vodu z krabičky a podívám se, kolik mililitrů vody mám v odměrce ($1 \text{ ml} = 1 \text{ cm}^3$).



U kostek to nejde! Ale mám řešení – prostě je napíchnu na nůž, ponořím je do vody a podívám se, kolik vody vytlačily.



Příklad 2.1: Krabíčka od tvarohu

šířka = 8,9 cm
délka = 6,8 cm
výška = 5 cm

$$V_{\text{spoč}} = 8,9 \cdot 6,8 \cdot 5 \doteq 303 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{voda}} = 300 \text{ cm}^3$$

$$\text{rozdíl} = 3 \text{ cm}^3 = \frac{300}{303} \% \text{ z } V_{\text{spoč}} \doteq 1 \% \text{ z } V_{\text{spoč}}$$



Příklad 2.2: Krabice od mléka

šířka = 9,8 cm
délka = 6,6 cm
výška = 16,5 cm

$$V_{\text{spoč}} = 9,8 \cdot 6,6 \cdot 16,5 \doteq 1067 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{voda}} = 1135 \text{ cm}^3$$

$$\text{rozdíl} = 68 \text{ cm}^3 = \frac{6800}{1067} \% \text{ z } V_{\text{spoč}} \doteq 6 \% \text{ z } V_{\text{spoč}}$$

Příklad 2.3: Krabice od rýže

šířka = 12,1 cm
délka = 5,2 cm
výška = 16,8 cm

$$V_{\text{spoč}} = 12,1 \cdot 5,2 \cdot 16,8 \doteq 1057 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{voda}} = 1070 \text{ cm}^3$$

$$\text{rozdíl} = 13 \text{ cm}^3 = \frac{1300}{1057} \% \text{ z } V_{\text{spoč}} \doteq 1 \% \text{ z } V_{\text{spoč}}$$

Příklad 2.4: Krabička od LED žárovky

šířka = 4,6 cm
délka = 4,6 cm
výška = 9 cm

$$V_{\text{spoč}} = 4,6 \cdot 4,6 \cdot 9 \doteq 190 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{voda}} = 191 \text{ cm}^3$$

$$\text{rozdíl} = 1 \text{ cm}^3 = \frac{100}{190} \% \text{ z } V_{\text{spoč}} \doteq 0,5 \% \text{ z } V_{\text{spoč}}$$



Příklad 2.5: Kostka s obrázkem

šířka = 4,2 cm
délka = 4,2 cm
výška = 4,2 cm

$$V_{\text{spoč}} = 4,2 \cdot 4,2 \cdot 4,2 \doteq 74 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{voda}} = 70 \text{ cm}^3$$

$$\text{rozdíl} = 4 \text{ cm}^3 = \frac{400}{74} \% \text{ z } V_{\text{spoč}} \doteq 6 \% \text{ z } V_{\text{spoč}}$$

Příklad 2.6: Dřevěná kostka

šířka = 2,9 cm
délka = 2,9 cm
výška = 6 cm

$$V_{\text{spoč}} = 2,9 \cdot 2,9 \cdot 6 \doteq 50 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{voda}} = 50 \text{ cm}^3$$

$$\text{rozdíl} = 0 \text{ cm}^3 = \frac{0}{50} \% \text{ z } V_{\text{spoč}} \doteq 0 \% \text{ z } V_{\text{spoč}}$$

Příklad 2.7: Žlutá kostka

šířka = 2,8
délka = 1,3
výška = 9

$$V_{\text{spoč}} = 2,8 \cdot 1,3 \cdot 9 \doteq 34 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{voda}} = 35 \text{ cm}^3$$

$$\text{rozdíl} = 1 \text{ cm}^3 = \frac{100}{34} \% \text{ z } V_{\text{spoč}} \doteq 3 \% \text{ z } V_{\text{spoč}}$$

Shrnutí výsledků a problémů:

Rozdíly mezi spočítanými objemy a objemy měřenými vodou byly maximálně šest procent, to je docela dobré. Asi největší chyby vznikly při měření vodou, protože naše odměrka má rozestupy jen po deseti mililitrech. Papírové krabičky navíc tečou, takže ztrácíme nějakou tu vodu, při nalévání vody do odměrky z velkých nádob to okolo špláchá, tím se ztratí další voda.

3. Hranaté obsahy

Když chci spočítat obsah obdélníku nebo čtverce, změřím jeho šířku, délku a vynásobím je mezi sebou:

$$S = \text{šířka} \cdot \text{délka}$$

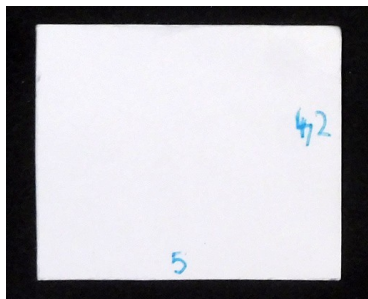


Výsledky jsem ověřovala tak, že jsem zvážila obdélník s obsahem 10 cm^2 , který byl ze čtverčky, z níž jsem vystříhovala tvary v příkladech. Vážil 0,20 gramu, děleno deseti (pracovala jsem s deseti centimetry čtverečními) znamenalo, že 1 cm^2 této čtverčky váží 0,02 gramu. To je rozumný výsledek, protože se čtverčky prodávají v gramáži 180, 200 nebo 220 g/m^2 .

Vystřížené tvary jsem několikrát zvážila a průměrný výsledek jsem vydělila váhou jednoho centimetru čtverečního čtverčky.

$$1 \text{ cm}^2 \text{ čtverčky váží } 0,02 \text{ gramu}$$

Příklad 3.1: Obdélník



$$S_{\text{spoč}} = 5 \cdot 4,2 = 21 \text{ cm}^2$$

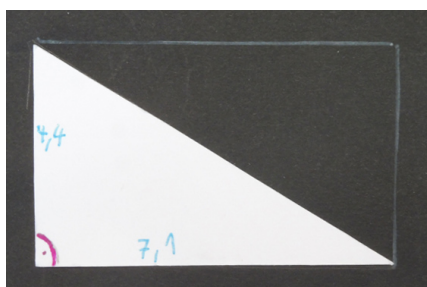
$$m = (0,45 + 0,41 + 0,43) : 3 = 0,43 \text{ g}$$

$$S_{\text{váha}} = 0,43 : 0,02 = 21,5 \text{ cm}^2$$

$$\text{rozdíl} = 0,5 \text{ cm}^2 = \frac{50}{21} \% \text{ z } S_{\text{spoč}} \doteq 2 \% \text{ z } S_{\text{spoč}}$$

Příklad 3.2: Pravoúhlý trojúhelník

Pravoúhlé trojúhelníky mají tu vlastnost, že jsou přesná polovina obdélníku nebo čtverce. Proto ho stačí vypočítat jako obdélník a výsledek vydělit dvěma.



$$S_{\text{spoč}} = 4,4 \cdot 7,1 : 2 \doteq 15,6 \text{ cm}^2$$

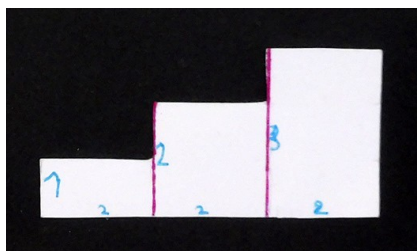
$$m = (0,32 + 0,30 + 0,33) : 3 \doteq 0,32 \text{ g}$$

$$S_{\text{váha}} = 0,32 : 0,02 = 16 \text{ cm}^2$$

$$\text{rozdíl} = 0,4 \text{ cm}^2 = \frac{40}{15,6} \% \text{ z } S_{\text{spoč}} \doteq 3 \% \text{ z } S_{\text{spoč}}$$

Příklad 3.3: Schody

Tyto schody se skládají ze tří obdélníků. Každý ze tří obdélníků jsem spočítala zvlášť a výsledky sečetla.



$$S_{\text{spoč}} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 12 \text{ cm}^2$$

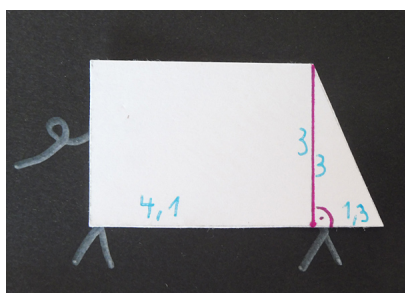
$$m = (0,24 + 0,23 + 0,22) : 3 = 0,23 \text{ g}$$

$$S_{\text{váha}} = 0,23 : 0,02 = 11,5 \text{ cm}^2$$

$$\text{rozdíl} = 0,5 \text{ cm}^2 = \frac{50}{12} \% \text{ z } S_{\text{spoč}} \doteq 4 \% \text{ z } S_{\text{spoč}}$$

Příklad 3.4: Prasátko

Prasátko je z obdélníku a pravoúhlého trojúhelníku, oba vypočítat umím (viz příklad 3.1 a 3.2).



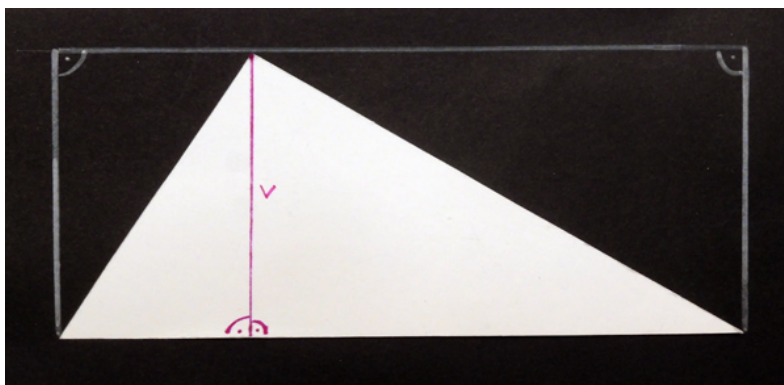
$$S_{\text{spoč}} = 3 \cdot 4,1 + 3 \cdot 1,3 : 2 = 14,3 \text{ cm}^2$$

$$m = (0,28 + 0,28 + 0,28) : 3 = 0,28 \text{ g}$$

$$S_{\text{váha}} = 0,28 : 0,02 = 14 \text{ cm}^2$$

$$\text{rozdíl} = 0,3 \text{ cm}^2 = \frac{30}{14,3} \% \text{ z } S_{\text{spoč}} \doteq 2 \% \text{ z } S_{\text{spoč}}$$

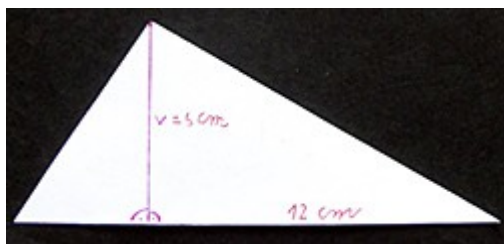
Vypočítat trojúhelník, který není pravoúhlý, je jednoduché. Podobně jako u prasete (příklad 3.4) trojúhelník „rozříznu“ na dva pravoúhlé:



- Oba pravoúhlé trojúhelníky jsou poloviny obdélníků, takže je spočítám jako obdélníčky a výsledek vydělím dvěma.
- Ty dva obdélníčky tvoří dohromady jeden velký obdélník. Spodní strana obdélníka je dlouhá jako spodní strana trojúhelníka, svislá strana má stejnou délku jako je trojúhelník vysoký (v v obrázku je to označené v). Obsah velkého obdélníka je tedy spodní strana trojúhelníka krát výška trojúhelníka.
- Protože dva pravoúhlé trojúhelníčky tvoří polovinu velkého obdélníka, bude jejich obsah polovina obsahu velkého obdélníka.
- Proto se obsah trojúhelníka spočítá jako strana krát výška děleno dvěma:

$$S = \text{strana} \cdot \text{výška} : 2$$

Příklad 3.5: Trojúhelník



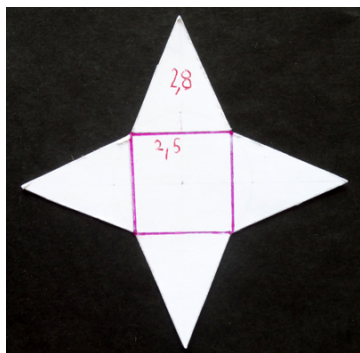
$$S_{\text{spoč}} = 12 \cdot 5 : 2 = 30 \text{ cm}^2$$

$$m = (0,65 + 0,61 + 0,65) : 3 \doteq 0,64 \text{ g}$$

$$S_{\text{váha}} = 0,64 : 0,02 = 32 \text{ cm}^2$$

$$\text{rozdíl} = 2 \text{ cm}^2 = \frac{200}{30} \% \text{ z } S_{\text{spoč}} \doteq 7 \% \text{ z } S_{\text{spoč}}$$

Příklad 3.6: Čtyřcípá hvězda



Čtyřcípá hvězda se skládá z čtverečku a čtyř trojúhelníčků.

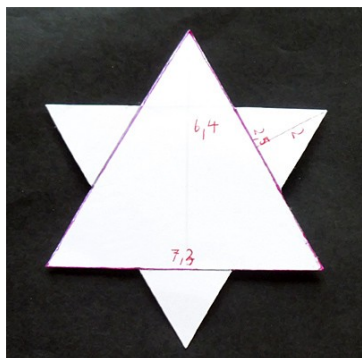
$$S_{\text{spoč}} = 2,5 \cdot 2,5 + (2,5 \cdot 2,8 \cdot 2) \doteq 20,3 \text{ cm}^2$$

$$m = (0,40 + 0,39 + 0,41) : 3 = 0,40 \text{ g}$$

$$S_{\text{váha}} = 0,40 : 0,02 = 20 \text{ cm}^2$$

$$\text{rozdíl} = 0,3 \text{ cm}^2 = \frac{30}{20,3} \% \text{ z } S_{\text{spoč}} \doteq 2 \% \text{ z } S_{\text{spoč}}$$

Příklad 3.7: Šesticípá hvězda



Šesticípá hvězda se skládá z velkého trojúhelníku a tří menších.

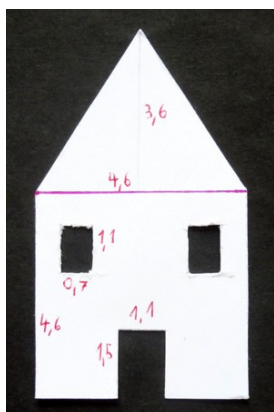
$$S_{\text{spoč}} = 7,3 \cdot 6,4 : 2 + 3 \cdot (2,5 \cdot 2 : 2) \doteq 30,9 \text{ cm}^2$$

$$m = (0,64 + 0,59 + 0,58) : 3 \doteq 0,60 \text{ g}$$

$$S_{\text{váha}} = 0,60 : 0,02 = 30 \text{ cm}^2$$

$$\text{rozdíl} = 0,9 \text{ cm}^2 = \frac{90}{30,9} \% \text{ z } S_{\text{spoč}} \doteq 3 \% \text{ z } S_{\text{spoč}}$$

Příklad 3.8: Domeček



Domeček se skládá z čtverce a trojúhelníka, odčítám okna a dveře, které jsou vystřižené.

$$S_{\text{spoč}} = 4,6 \cdot 3,6 : 2 + (4,6 \cdot 4,6) - (0,7 \cdot 1,1 \cdot 2) - (1,1 \cdot 1,5) \doteq 24,6 \text{ cm}^2$$

$$m = (0,53 + 0,52 + 0,50) : 3 \doteq 0,52 \text{ g}$$

$$S_{\text{váha}} = 0,52 : 0,02 = 26 \text{ cm}^2$$

$$\text{rozdíl} = 1,4 \text{ cm}^2 = \frac{140}{24,6} \% \text{ z } S_{\text{spoč}} \doteq 6 \% \text{ z } S_{\text{spoč}}$$

Shrnutí výsledků a problémů:

Rozdíly mezi spočítanými obsahy a obsahy vypočítanými pomocí váhy byly maximálně sedm procent, to je pořád dobré. Asi největší chyby vznikly při vážení, protože vážíme malé věci a váha záleží hodně na poloze papíru. Proto jsme vážily papíry třikrát a počítaly jsme s průměrným výsledkem. Některé papíry byly navíc zezadu pomalované barvou, tím se asi také nějaká váha přičetla, vystřihovaly jsme je totiž ze starých obrázků.

U šesticípé hvězdy jsem si nejdřív špatně rozmyslela, jak spočítat obsah. Rozdíl výsledků se pak lišil víc než obvykle (o 50 %) a podle toho jsem přišla na to, že tam mám chybu.

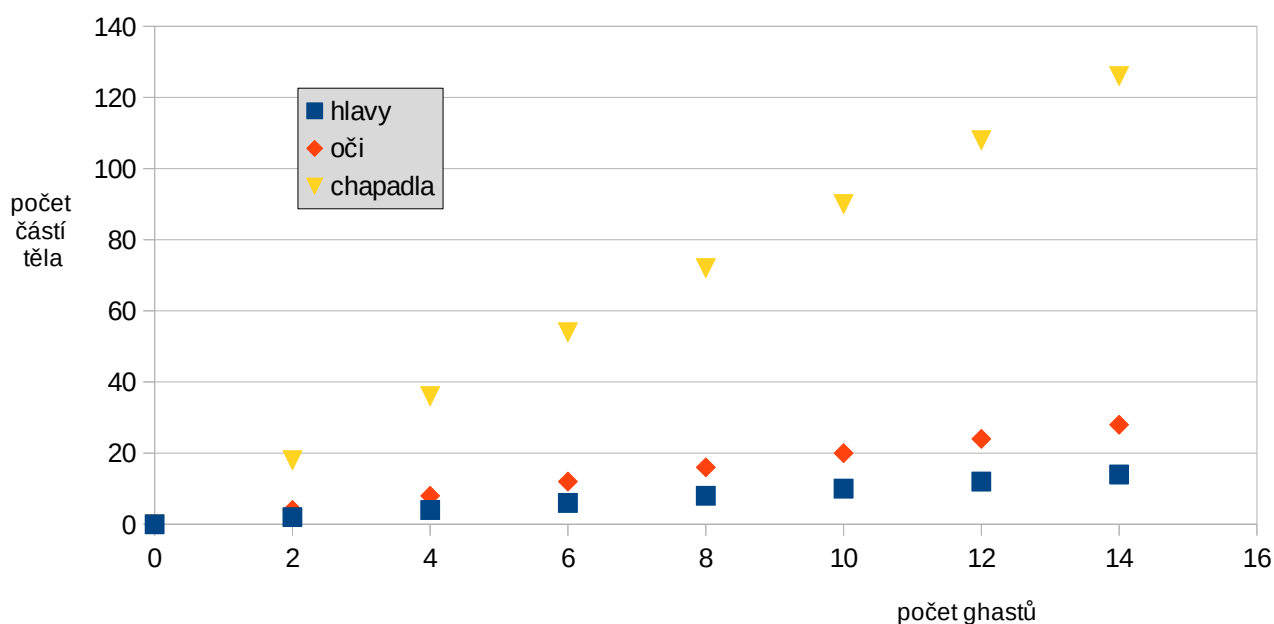
4. Kruhy



Větší kruhy mají větší obvody. Jenomže o kolik? V této kapitole se to budu snažit zjistit pomocí grafů v Calcu. Nejdříve si to zkusím na něčem jednoduchém – na ghastech.

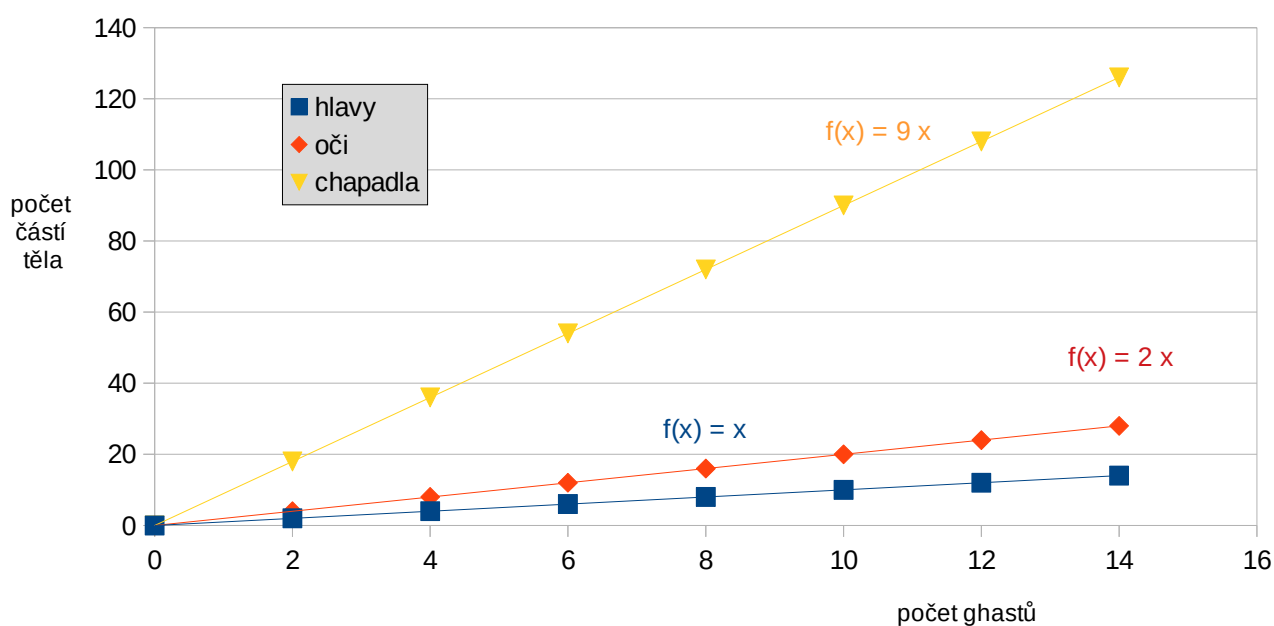
Ghasti jsou nepřátelské bytosti ze světa Minecraftu, vznášejí se a vypadají trochu jako mraky. Mají jednu velkou hlavu, na ní dvě brečící oči a visí z nich devět chapadel. Určila jsem počty hlav, očí a chapadel pro sudé počty ghastů od 0 do 14 a udělala jsem z toho bodový graf:

Počet částí těla v závislosti na počtu ghasťů



Calc umí položit mezi zadané body přímku, aby byla všem bodům co nejbliž. Tady je to přímka, která rovnou všemi body prochází. Umí také napsat rovnici té přímky. Rovnice říká, jak vypočítat počet částí těla z počtu ghasťů.

Počet částí těla v závislosti na počtu ghasťů - spojnice



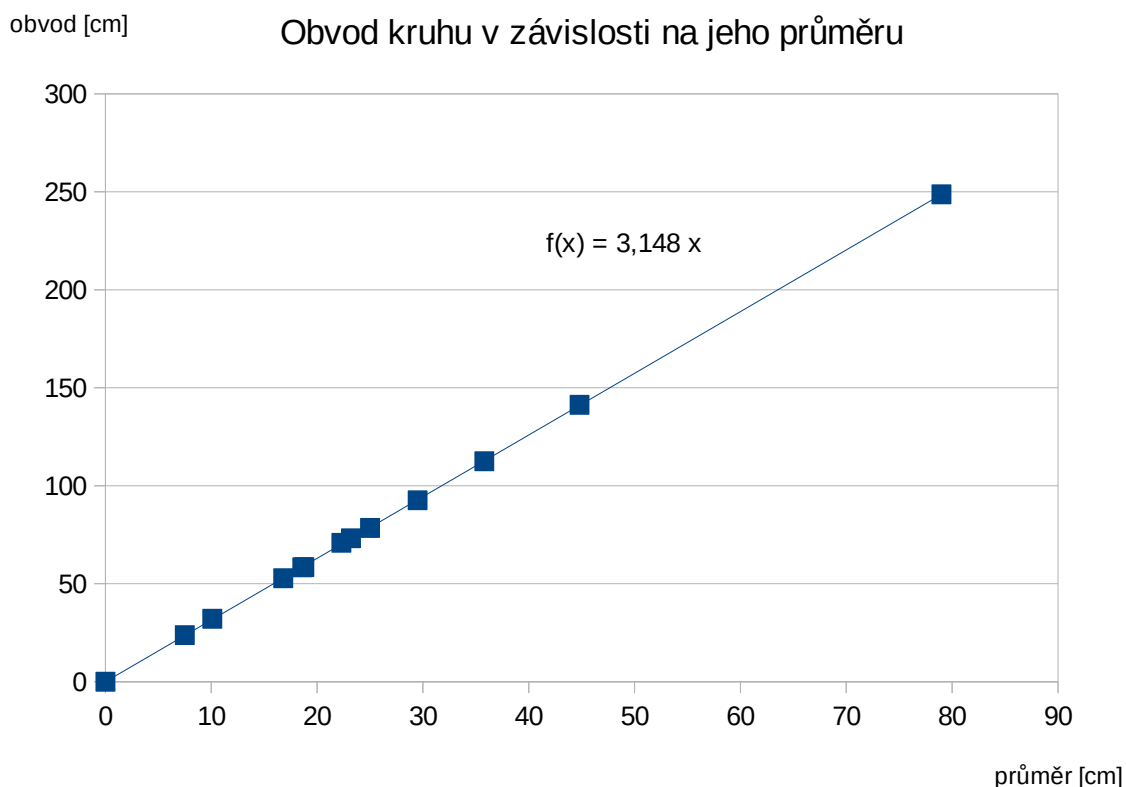
Calc určil, že počet chapadel je devět krát počet ghasťů, počet očí je dva krát počet ghasťů a počet hlav se rovná počtu ghasťů. I když ghasťů nikdy neviděl. Stačily mu k tomu body v grafu.

Podobně budu postupovat při hledání vztahu mezi průměrem a obvodem. Nejdřív naměřím spoustu průměrů a obvodů kulatých věcí u nás doma, abych měla pro Calc body do grafu:



předmět	průměr [cm]	obvod [cm]
nicotný kruh	0	0
plechovka ananas	7,5	23,8
izolepa	10,1	32,1
velká poklice	29,5	92,6
cedník	23,2	73,2
víko od krabice	25	78,5
talířek	18,8	58,5
rendlík	16,8	52,8
květináč	35,8	112,5
miska pro psa	18,6	58,4
kýbl	22,3	70,9
pračka	44,8	141,3
kobereček	79	248,7

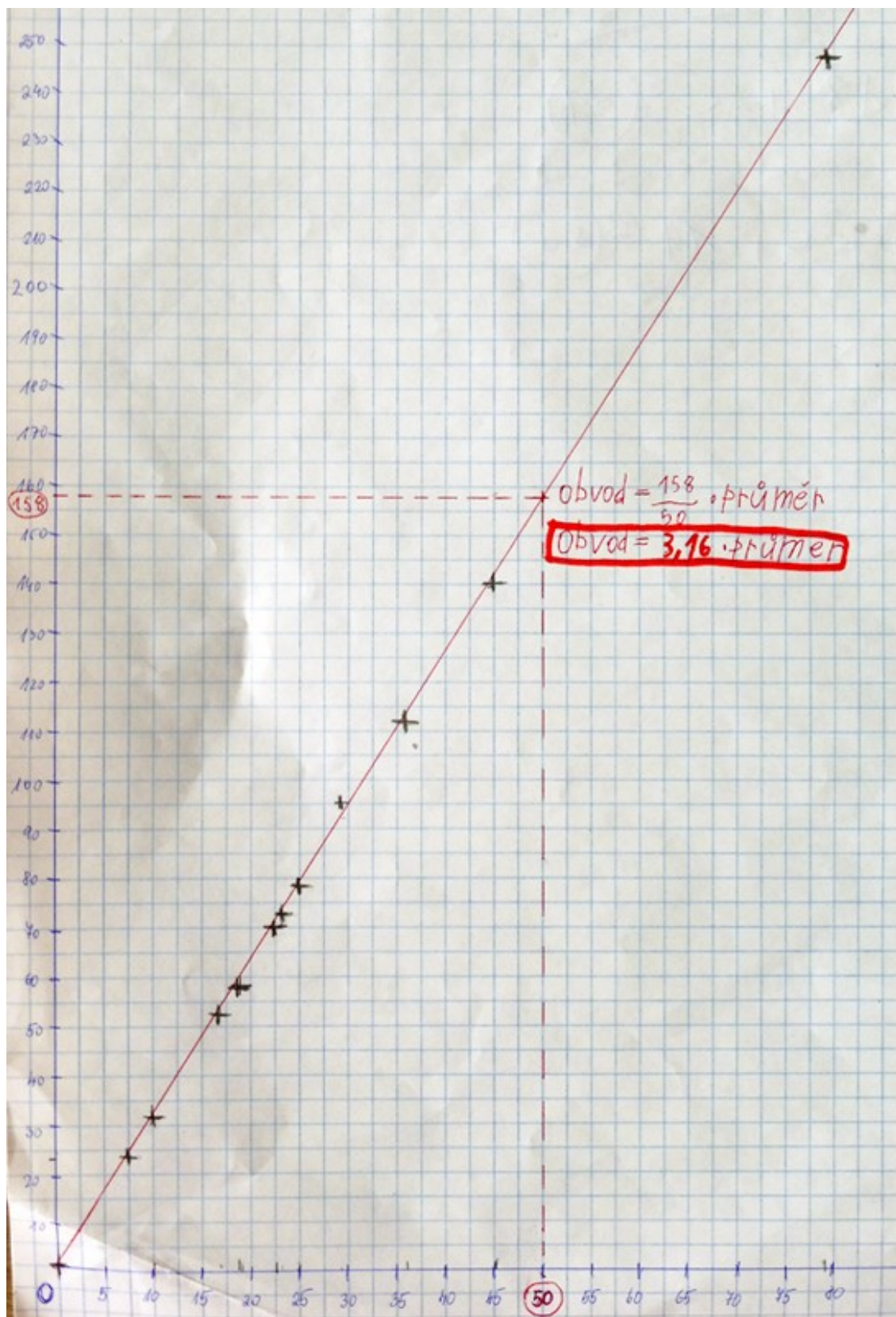
Ted' z toho udělám bodový graf, hned vidím, že tvoří přibližně čáru. Nechám Calc body spojit co nejlepší přímkou a vypadá to docela přesně. Některé body jsou trošičku nad, jiné trochu pod. Nechám ho napsat rovnici.



Rovnice říká, že **obvod je asi 3,148krát větší než průměr**.

Zvládla jsem to i bez Calcu – a to dokonce dvěma způsoby. První z nich byl, že jsem postupovala stejně jako Calc, akorát na papíře. Nejdřív jsem nakreslila osy, jako měl Calc v grafu. Potom jsem podle údajů z měření kulatých věcí udělala body a propojila jsem je co nejpřesnější přímkou, jenom

jsem to udělala ručně, takže to nebylo příliš přesné. Nakonec jsem udělala svůj bod, který byl na přímce (žádný z bodů v měření kromě 0.0 nebyl přesně na přímce), vydělila jsem jeho obvod průměrem a výsledek byl: **3.16**



Druhý způsob byl poněkud primitivní, prostě jsem všechny obvody v tabulce vydělila jejich průměrem a výsledky jsem zprůměrovala:

předmět	průměr [cm]	obvod [cm]	vydělené
nicotný kruh	0	0	-
plechovka ananas	7,5	23,8	3,17333333333333
izolepa	10,1	32,1	3,17821782178218
velká poklice	29,5	92,6	3,13898305084746
cedník	23,2	73,2	3,1551724137931
víko od krabice	25	78,5	3,14
talířek	18,8	58,5	3,11170212765957
rendlík	16,8	52,8	3,14285714285714
květináč	35,8	112,5	3,14245810055866
miska pro psa	18,6	58,4	3,13978494623656
kýbl	22,3	70,9	3,17937219730942
pračka	44,8	141,3	3,15401785714286
kobereček	79	248,7	3,14810126582278
průměrně:			3,15033335477859

Nakonec jsem si v tabulkách našla, že obvod kruhu je π -krát větší než průměr, přičemž tam píšou, že π se rovná přibližně **3,14**. To je skoro stejný výsledek, jako jsem určila já.

Délky a obsahy		
délka kružnice, obvod kruhu	$o = 2\pi r = \pi d$	$\pi \doteq 3,141\ 593$ (Ludolfovo číslo)
obsah kruhu	$S = \pi r^2 = \frac{1}{4}\pi d^2$	

Vzorec pro obvod kruhu je tedy:

$$o = \pi \cdot \text{průměr}$$

$$\pi \doteq 3,14$$

Ted' budu počítat **obsah kruhu**, na to použiji velmi fikaný způsob:

Nastříhala jsem kruh na maličké dílky - „koláčky“, ty jsem nalepila na papír (střídavě zobáčkem nahoru a zobáčkem dolů, viz obrázek), kde vytvořily skoro obdélník. Pak už jen stačilo vypočítat obsah toho obdélníka a to byl obsah kruhu, protože obdélník byl vyrobený z nastříhaného kruhu, takže obsahy byly stejné, akorát koláčky ležely v různých seskupeních.



Obsah obdélníka se spočítá jako delší strana krát kratší strana, kratší strana byla delší dílek koláčku a ten byl vystřižen do poloviny kruhu, takže ta strana byla dlouhá jako poloměr kruhu. Delší strana byla vytvořená z polovičního počtu krátkých stran koláčku, ty tvořily obvod, takže delší strana obdélníka byla velká jako půlka obvodu kruhu. Vzorec pro obsah kruhu je tedy:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \text{obvod} \cdot \text{poloměr}$$

a protože obvod vypočítat umím, bude vzorec vypadat takhle:

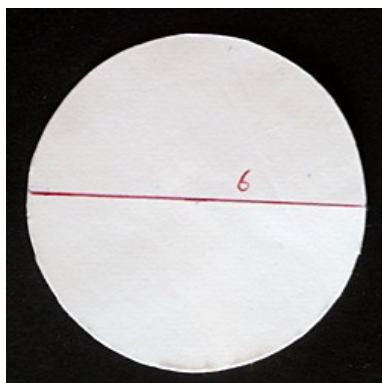
$$S = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \text{průměr} \cdot \text{poloměr}$$

a protože polovina průměru je poloměr, tak to nakonec bude vypadat takhle:

$$S = \pi \cdot \text{poloměr} \cdot \text{poloměr}$$

Ted' svůj výsledek porovnáám s tabulkami, kde je napsáno (fotka na předchozí stránce), že obsah kruhu $S = \pi r^2$ neboli $S = \pi \cdot \text{poloměr} \cdot \text{poloměr}$, takže to mám dobře.

Příklad 4.1: Kruh



$$S_{\text{spoč}} = 3,14 \cdot 3 \cdot 3 \doteq 28,3 \text{ cm}^2$$

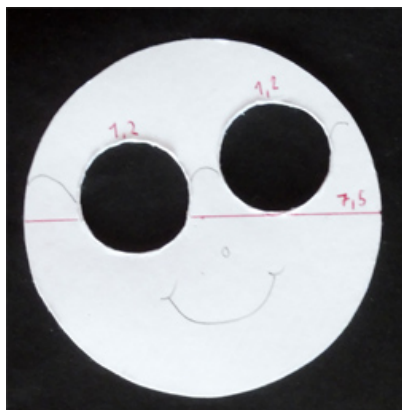
$$m = (0,55 + 0,56 + 0,56) : 3 \doteq 0,56 \text{ g}$$

$$S_{\text{váha}} = 0,55 : 0,02 = 27,5 \text{ cm}^2$$

$$\text{rozdíl} = 0,8 \text{ cm}^2 = \frac{80}{28,3} \% \text{ z } S_{\text{spoč}} \doteq 3 \% \text{ z } S_{\text{spoč}}$$

Příklad 4.2: Smajlík

Podobně jako u domečku (příklad 3.8) musím odečíst díry.



$$S_{\text{kruh}} = 3,14 \cdot 3,75 \cdot 3,75 \doteq 44,2 \text{ cm}^2$$

$$S_{\text{oko}} = 3,14 \cdot 1,2 \cdot 1,2 \doteq 4,5 \text{ cm}^2$$

$$S_{\text{spoč}} = S_{\text{kruh}} - S_{\text{oko}} - S_{\text{oko}} = 35,2 \text{ cm}^2$$

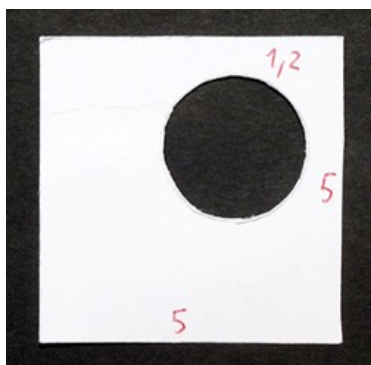
$$m = (0,73 + 0,72 + 0,72) : 3 \doteq 0,72 \text{ g}$$

$$S_{\text{váha}} = 0,72 : 0,02 = 36 \text{ cm}^2$$

$$\text{rozdíl} = 0,8 \text{ cm}^2 = \frac{80}{35,2} \% \text{ z } S_{\text{spoč}} \doteq 2 \% \text{ z } S_{\text{spoč}}$$

Příklad 4.3: Děravý čtverec

Podobný postup jako u smajlíka, jenom místo kruhu mám čtverec.



$$S_{\text{čtverec}} = 5 \cdot 5 = 25 \text{ cm}^2$$

$$S_{\text{díra}} = 3,14 \cdot 1,2 \cdot 1,2 \div 4,5 \text{ cm}^2$$

$$S_{\text{spoč}} = S_{\text{čtverec}} - S_{\text{díra}} = 20,5 \text{ cm}^2$$

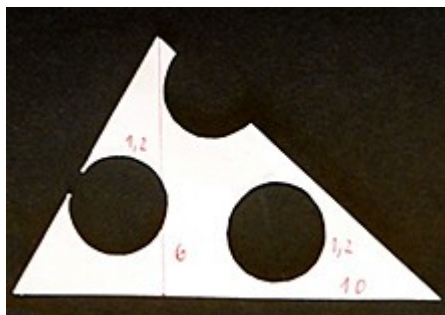
$$m = (0,40 + 0,41 + 0,38) : 3 \div 0,40 \text{ g}$$

$$S_{\text{váha}} = 0,40 : 0,02 = 20 \text{ cm}^2$$

$$\text{rozdíl} = 0,5 \text{ cm}^2 = \frac{50}{20,5} \% \text{ z } S_{\text{spoč}} \div 2 \% \text{ z } S_{\text{spoč}}$$

Příklad 4.4: Ementál

Podobný postup jako u čtverce, jen má ementál v sobě dvě díry a jednu poloviční díru.



$$S_{\text{trojúhelník}} = 6 \cdot 10 : 2 = 30 \text{ cm}^2$$

$$S_{\text{díra}} = 3,14 \cdot 1,2 \cdot 1,2 \div 4,5 \text{ cm}^2$$

$$S_{\text{spoč}} = S_{\text{trojúhelník}} - 2,5 \cdot S_{\text{díra}} \div 18,8 \text{ cm}^2$$

$$m = (0,39 + 0,36 + 0,37) : 3 \div 0,37 \text{ g}$$

$$S_{\text{váha}} = 0,37 : 0,02 = 18,5 \text{ cm}^2$$

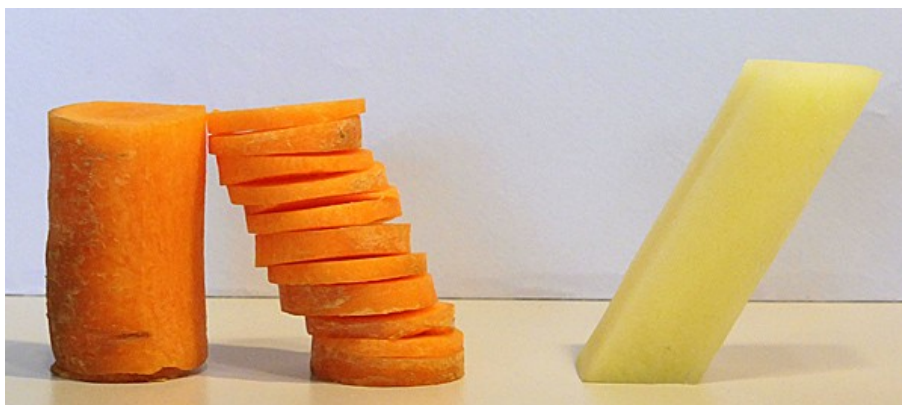
$$\text{rozdíl} = 0,3 \text{ cm}^2 = \frac{30}{18,8} \% \text{ z } S_{\text{spoč}} \div 2 \% \text{ z } S_{\text{spoč}}$$

5. Válce a složitější tvary

Když chci spočítat objem kvádru, vynásobím obsah podstavy výškou kvádru. U válce to funguje úplně stejně: spočítám si obsah spodního kruhu a vynásobím ho výškou válce:

$$V = \pi \cdot \text{poloměr} \cdot \text{poloměr} \cdot \text{výška}$$

Platí to i s jinými tvary, musí ale splňovat následující: průřez bude ve všech výškách stejný. Takže dokážu spočítat i vlnící se trubku, jenom musí mít průřez ve všech výškách stejný. Jednotlivé plátky (průřezy) můžu mít naskládané nad sebou, nebo vůči sobě posunuté jako na obrázku:



$$V = \text{obsah podstavy} \cdot \text{výška}$$

V příkladech budu počítat objemy těles, co mám na obrázku, výsledky ověřím u nádob naléváním vody, nedutá tělesa ponořím do vody.



Příklad 5.1: Hrneček krteček

poloměr = 3,4 cm

výška = 10,3 cm

$$V_{\text{spoč}} = 3,14 \cdot 3,4 \cdot 3,4 \cdot 10,3 \doteq 374 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{voda}} = 280 \text{ cm}^3$$

$$\text{rozdíl} = 94 \text{ cm}^3 = \frac{9400}{374} \% \text{ z } V_{\text{spoč}} \doteq 25 \% \text{ z } V_{\text{spoč}}$$

Příklad 5.2: Konzerva

poloměr = 3,35 cm

výška = 2,9 cm

$$V_{\text{spoč}} = 3,14 \cdot 3,35 \cdot 3,35 \cdot 2,9 \doteq 102 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{voda}} = 100 \text{ cm}^3$$

$$\text{rozdíl} = 2 \text{ cm}^3 = \frac{200}{102} \% \text{ z } V_{\text{spoč}} \doteq 2 \% \text{ z } V_{\text{spoč}}$$

Příklad 5.3: Rendlík

poloměr = 5,4 cm

výška = 5,1 cm

$$V_{\text{spoč}} = 3,14 \cdot 5,4 \cdot 5,4 \cdot 5,1 \doteq 467 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{voda}} = 470 \text{ cm}^3$$

$$\text{rozdíl} = 3 \text{ cm}^3 = \frac{300}{467} \% \text{ z } V_{\text{spoč}} \doteq 0,6 \% \text{ z } V_{\text{spoč}}$$

Příklad 5.4: Krabice od čaje

Krabice s trojúhelníkovou podstavou, má zaoblené rohy.

výška = 13,7 cm

strana trojúhelníka = 8,5 cm

výška trojúhelníka = 7,8 cm

$$V_{\text{podstava}} = 8,5 \cdot 7,8 : 2 \doteq 33 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{spoč}} = 33 \cdot 13,7 \doteq 452 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{voda}} = 510 \text{ cm}^3$$

$$\text{rozdíl} = 58 \text{ cm}^3 = \frac{5800}{452} \% \text{ z } V_{\text{spoč}} \doteq 13 \% \text{ z } V_{\text{spoč}}$$

Příklad 5.5: Dřevěný most

Dřevěný most je kvádr, ze kterého je vyříznutý půlválec.

poloměr díry = 2 cm

výška = 2,9 cm

délka = 2,9 cm

šířka = 6 cm

$$V_{\text{kvádr}} = 5,9 \cdot 2,9 \cdot 2,9 \doteq 49 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{díra}} = 3,14 \cdot 2 \cdot 2 : 2 \cdot 2,9 \doteq 18 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{spoč}} = V_{\text{kvádr}} - V_{\text{díra}} = 31 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{voda}} = 30 \text{ cm}^3$$

$$\text{rozdíl} = 1 \text{ cm}^3 = \frac{100}{31} \% \text{ z } V_{\text{spoč}} \doteq 3 \% \text{ z } V_{\text{spoč}}$$

Příklad 5.6: Zelená příšera

Zelená příšera je krychle šikmo přeříznutá na polovinu a je v ní válcovitá díra, také šikmo přeříznutá na polovinu.

poloměr díry = 0,95 cm

výška = 4 cm

šířka podstavy = 4,2 cm

délka podstavy = 4,2 cm

$$V_{\text{polokostka}} = 4 \cdot 4,2 \cdot 4,2 : 2 \doteq 35 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{díra}} = 3,14 \cdot 0,95 \cdot 0,95 \cdot 4 : 2 \doteq 5,7 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{spoč}} = V_{\text{polokostka}} - V_{\text{díra}} = 29,3 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{voda}} = 30 \text{ cm}^3$$

$$\text{rozdíl} = 0,7 \text{ cm}^3 = \frac{70}{29,3} \% \text{ z } V_{\text{spoč}} \doteq 2 \% \text{ z } V_{\text{spoč}}$$

Příklad 5.7: Sešlápnutý kvádr



Sešlápnutý kvádr jsem složila z papíru, spočítala jsem objem se správnou a špatnou výškou (viz obrázek) a nasypala jsem do něj pro ověření mouku, protože ve vodě se papír snadno rozmáčí.

správná výška = 5,3 cm

špatná výška = 15 cm

šířka podstavy = 5 cm

délka podstavy = 5 cm

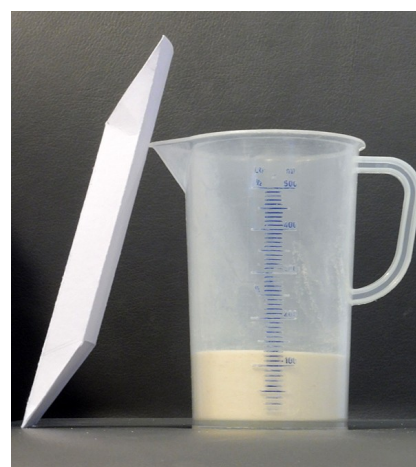
$$V_{\text{správný}} = 5 \cdot 5 \cdot 5,3 \doteq 133 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{špatný}} = 5 \cdot 5 \cdot 15 = 375 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{mouka}} = 130 \text{ cm}^3$$

$$\text{rozdíl}_{\text{správný}} = 3 \text{ cm}^3 = \frac{300}{130} \% \text{ z } V_{\text{mouka}} \doteq 2 \% \text{ z } V_{\text{mouka}}$$

$$\text{rozdíl}_{\text{špatný}} = 245 \text{ cm}^3 = \frac{24500}{130} \% \text{ z } V_{\text{mouka}} \doteq 188 \% \text{ z } V_{\text{mouka}}$$



Shrnutí výsledků a problémů:

Rozdíly mezi spočítanými výsledky a výsledky měřenými vodou činily maximálně 13 %, to už začíná být na pováženou. Výjimka byl Hrneček Krteček, ten měl rozdíl 25 %. Nejspíše to bylo tím, že se mírně rozšiřoval a měl hodně tlusté stěny a dno. Trojúhelníková krabička měla zaoblené rohy, proto byl rozdíl i u ní vysoký.

V posledním příkladě jsem počítala objem se „správnou“ a „špatnou“ výškou (viz obrázek výše). Výpočet se správnou výškou vyšel skoro stejně jako naměřený objem, výpočet se špatnou výškou byl skoro třikrát větší. Z toho jsem ověřila, že když je kvádr sešlápnutý, nesmí se počítat jako strana krát strana krát strana, ale jako strana krát strana krát kolmá výška.

6. Povrchy a sítě

Povrch tělesa je všechno, co můžu zvenčí přemalovat nazeleno (nebo nažluto :)). Je to vlastně obsah všech stěn. Stěny rýsuji i při dělání sítě tělesa, když si ho chci třeba postavit z papíru. Takže rýsování sítě mi může pomoci při vypočítání povrchu.

Znát povrch se hodí kupříkladu když si chci vymalovat byt, pak budu vědět, kolik barvy si mám koupit.

povrch = součet obsahů všech stěn tělesa

V příkladech teď budu vypočítávat povrchy a výsledky ověřím vážením jako u příkladů na obsah. Nej dřív narýsuji síť, potom ji vystřihnu a nakonec ji rozstřihám na kousky, které vyrovnám do komínku a položím na váhu.



Příklad 6.1: Sešlápnutý kvádr

Síť sešlápnutého kvádru se skládá ze dvou stejných obdélníků, dvou stejných čtverců (oboje vypočítat umím) a dvou stejných kosodélníků. Kosodélník jsem vypočítala jako dva trojúhelníčky a jeden obdélník, podobně jako u prasete (příklad 3.4). Protože ale na jednom kosodélníku byly dva trojúhelníčky stejné, tak jsem je mohla dát k sobě a vytvořily obdélník, proto jsem kosodélník počítala jako obdélník.

čtverec strana = 5 cm
 obdélník delší strana = 15 cm
 obdélník kratší strana = 5 cm
 kosodélník delší strana = 15 cm
 kosodélník výška = 1,7 cm
 váha jednoho cm² papíru = 0,0216 g

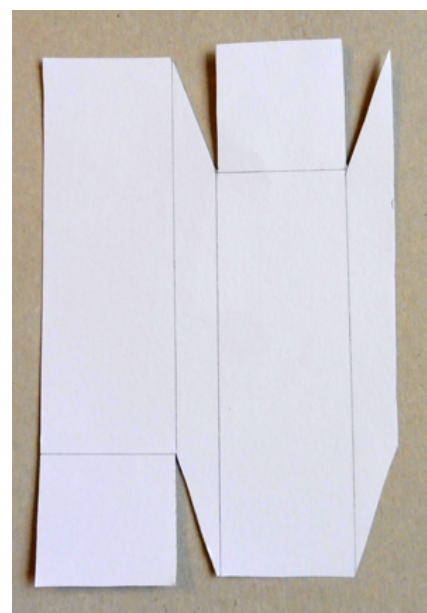
$$S_{\text{spoč}} = (5 \cdot 5 \cdot 2) + (15 \cdot 5 \cdot 2) + (15 \cdot 1,7 \cdot 1,7)$$

$$S_{\text{spoč}} \doteq 243 \text{ cm}^2$$

$$m = (5,23 + 5,25 + 5,36) : 3 = 5,28 \text{ g}$$

$$S_{\text{váha}} = 5,28 : 0,0216 \doteq 244 \text{ cm}^2$$

$$\text{rozdíl} = 1 \text{ cm}^2 = \frac{100}{243} \% \text{ z } S_{\text{spoč}} \doteq 0,4 \% \text{ z } S_{\text{spoč}}$$



Příklad 6.2: Válec

Sít' válce je z obdélníku a dvou kruhů. Delší rozměr obdélníka je obvodem kruhu.

obdélník delší strana = 25,1 cm

obdélník kratší strana = 7 cm

kruh poloměr = 4 cm

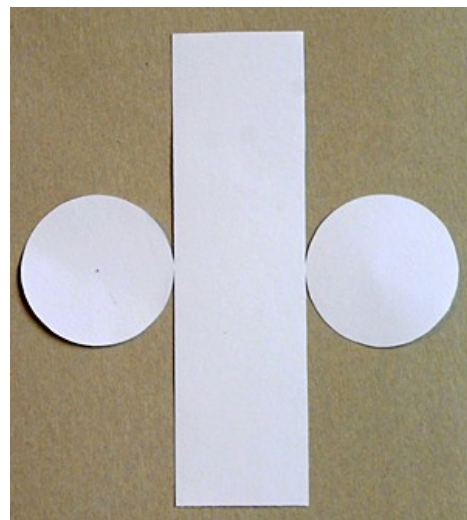
váha jednoho cm² papíru = 0,0216 g

$$S_{\text{spoč}} = (3,14 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2) + (25,1 \cdot 7) \doteq 276 \text{ cm}^2$$

$$m = (5,88 + 5,86 + 5,87) : 3 = 5,87 \text{ g}$$

$$S_{\text{váha}} = 5,87 : 0,0216 \doteq 272 \text{ cm}^2$$

$$\text{rozdíl} = 4 \text{ cm}^2 = \frac{400}{276} \% \text{ z } S_{\text{spoč}} \doteq 1 \% \text{ z } S_{\text{spoč}}$$



Příklad 6.3: Šestiboká krabička bez víčka

Sít' šestiboké krabičky je z šestiúhelníku a šesti obdélníků. Šestiúhelník jsem počítala jako dva trojúhelníky po stranách a obdélník.

obdélník v šestiúhelníku delší strana = 10,4 cm

obdélník v šestiúhelníku kratší strana = 6 cm

trojúhelník v šestiúhelníku spodní strana = 10,4 cm

trojúhelník v šestiúhelníku výška = 3 cm

obdélník kratší strana = 4 cm

obdélník delší strana = 6 cm

váha jednoho cm² papíru = 0,020 g

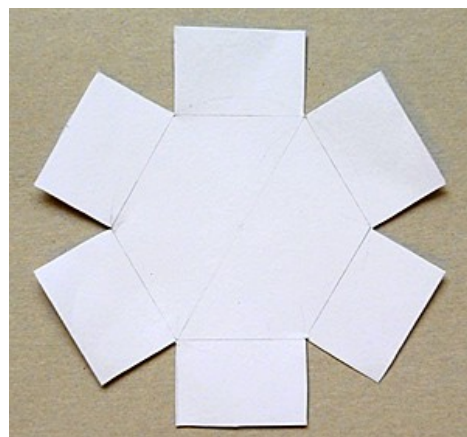
$$S_{\text{spoč}} = (10,4 \cdot 6) + (2 \cdot 10,4 \cdot 3 : 2) + (6 \cdot 4 \cdot 6)$$

$$S_{\text{spoč}} \doteq 239 \text{ cm}^2$$

$$m = (4,96 + 4,92 + 4,90) : 3 \doteq 4,93 \text{ g}$$

$$S_{\text{váha}} = 4,93 : 0,02 \doteq 246,5 \text{ cm}^2$$

$$\text{rozdíl} = 7,5 \text{ cm}^2 = \frac{750}{239} \% \text{ z } S_{\text{spoč}} \doteq 3 \% \text{ z } S_{\text{spoč}}$$



7. Platónská tělesa a jejich povrchy

Platónské těleso je těleso, které není promáčknuté a splňuje následující:

Jeho stěny jsou stejné pravidelné n-úhelníky.

Z každého vrcholu vede stejný počet hran.

Stavěla jsem tělesa z magnetické stavebnice, nejdříve jsem si vybrala jeden pravidelný n-úhelník (rovnostanný trojúhelník, čtverec, pravidelný pětiúhelník, šestiúhelník, sedmiúhelník...), potom jsem ho skládala s různými počty hran vedoucích z vrcholů. U každého tělesa jsem ještě narýsovala jeho síť na čtvrtku, zvážila ji a vypočítala povrch.

První těleso jsem složila z rovnostanných trojúhelníků, z každého vrcholu vedly tři hrany. Méně vést nemůže, protože jinak by to nebylo trojrozměrné. Tohle těleso mělo 4 stěny, 4 vrcholy a 6 hran. Nazývá se **ČTYŘSTĚN**. Jeho povrch spočítám tak, že vypočítám obsah jednoho z trojúhelníků a výsledek vynásobím čtyřmi:



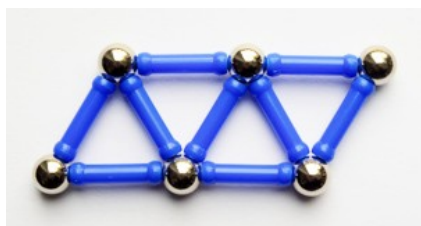
délka hrany čtyřstěnu = 10 cm
výška v trojúhelníku = 8,6 cm
váha jednoho cm² papíru = 0,019 g

$$S_{\text{spoč}} = 4 \cdot 8,6 \cdot 10 : 2 = 172 \text{ cm}^2$$

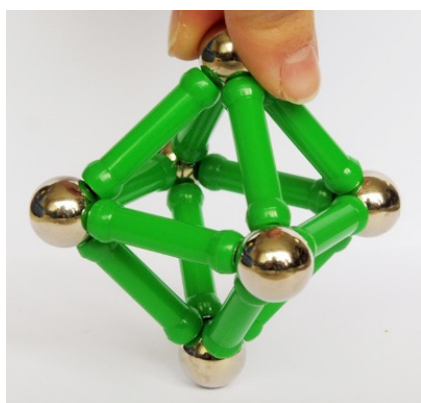
$$m = (3,36 + 3,34 + 3,35) : 3 = 3,35 \text{ g}$$

$$S_{\text{váha}} = 3,35 : 0,019 \doteq 176 \text{ cm}^2$$

$$\text{rozdíl} = 4 \text{ cm}^2 = \frac{400}{172} \% \text{ z } S_{\text{spoč}} \doteq 2 \% \text{ z } S_{\text{spoč}}$$



Druhé těleso je také z trojúhelníků, z každého vrcholu vedly čtyři hrany. Tohle těleso mělo 8 stěn, 6 vrcholů a 12 hran. Nazývá se **OSMISTĚN** a jeho povrch se spočítá tak, že vypočítám obsah jednoho z trojúhelníků a výsledek vynásobím osmi:



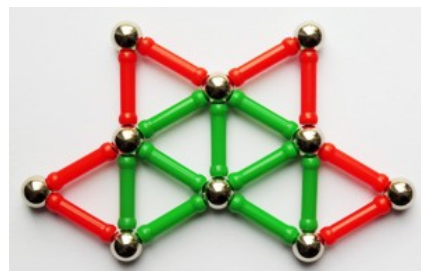
délka hrany osmistěnu = 8 cm
výška v trojúhelníku = 6,8 cm
váha jednoho cm² papíru = 0,019 g

$$S_{\text{spoč}} = 8 \cdot 8 \cdot 6,8 : 2 = 218 \text{ cm}^2$$

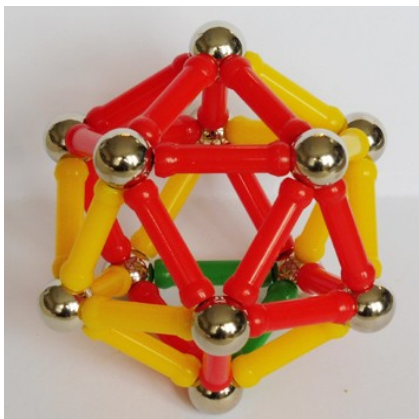
$$m = (4,28 + 4,28 + 4,28) : 3 = 4,28 \text{ g}$$

$$S_{\text{váha}} = 4,28 : 0,019 \doteq 225 \text{ cm}^2$$

$$\text{rozdíl} = 7 \text{ cm}^2 = \frac{700}{218} \% \text{ z } S_{\text{spoč}} \doteq 3 \% \text{ z } S_{\text{spoč}}$$



Třetí těleso je rovněž z trojúhelníků, tentokrát jsem vedla z každého vrcholu pět hran. Toto těleso mělo 20 stěn, 12 vrcholů a 30 hran. Vyšel mi **DVACETISTĚN**. Jeho povrch se spočítá tak, že se vypočítá obsah jednoho z trojúhelníků a výsledek se vynásobí dvaceti:



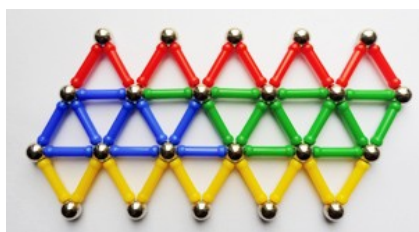
délka hrany dvacetistěnu = 5 cm
výška v trojúhelníku = 4,4 cm
váha jednoho cm² papíru = 0,018 g

$$S_{\text{spoč}} = 20 \cdot 5 \cdot 4,4 : 2 = 220 \text{ cm}^2$$

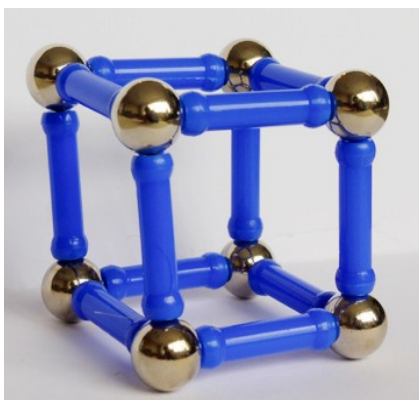
$$m = (4,21 + 4,22 + 4,20) : 3 = 4,21 \text{ g}$$

$$S_{\text{váha}} = 4,21 : 0,018 \doteq 234 \text{ cm}^2$$

$$\text{rozdíl} = 14 \text{ cm}^2 = \frac{1400}{220} \% \text{ z } S_{\text{spoč}} \doteq 6 \% \text{ z } S_{\text{spoč}}$$



Čtvrté těleso se neskládá z trojúhelníků, protože kdybych se pokusila přidat šestý trojúhelník z vrcholu, vyšla by mi placka. Skládá se proto ze čtverců, z každého vrcholu vedly tři hrany. Tohle těleso má 6 stěn, 8 vrcholů a 12 hran. Vyšel mi šestistěn neboli **KRYCHLE**. Povrch krychle spočítám tak, že spočítám obsah jednoho čtverce a vynásobím šesti. A další těleso ze čtverců už nemůžu udělat, protože přidáním čtvrtého čtverce do vrcholu by mi vznikla placka.



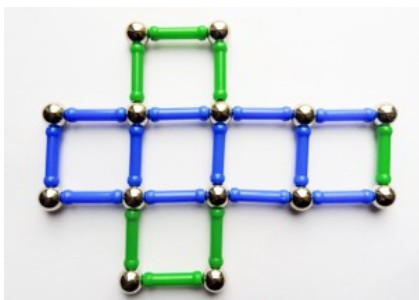
délka hrany čtverce = 4 cm
váha jednoho cm² papíru = 0,021 g

$$S_{\text{spoč}} = 4 \cdot 4 \cdot 6 = 96 \text{ cm}^2$$

$$m = (1,87 + 1,87 + 1,87) : 3 = 1,87 \text{ g}$$

$$S_{\text{váha}} = 1,87 : 0,021 \doteq 89 \text{ cm}^2$$

$$\text{rozdíl} = 7 \text{ cm}^2 = \frac{700}{96} \% \text{ z } S_{\text{spoč}} \doteq 7 \% \text{ z } S_{\text{spoč}}$$



Páté těleso je z pětiúhelníků, z každého vrcholu vedou tři hrany. Tohle těleso mělo 12 stěn, 20 vrcholů a 30 hran. Je to **DVANÁCTISTĚN**. Jelikož ale má 20 vrcholů, na které ve stavebnici používám těžké kovové kuličky, zhroutl se a ani síť ze stavebnice nedržela dobře tvar. Proto mám jako obrázek papírový model, který jsem kdysi vyrobila. Povrch dvanáctistěnu se spočítá tak, že si pětiúhelník rozdělím na pět stejných trojúhelníků, vypočítám obsah jednoho z nich, výsledek vynásobím pěti a pak dvanácti:



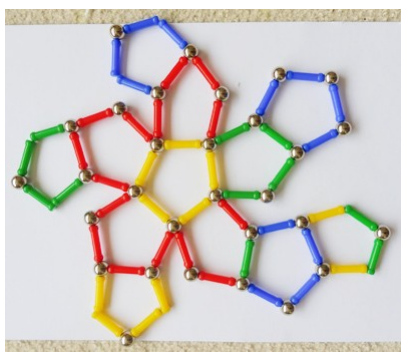
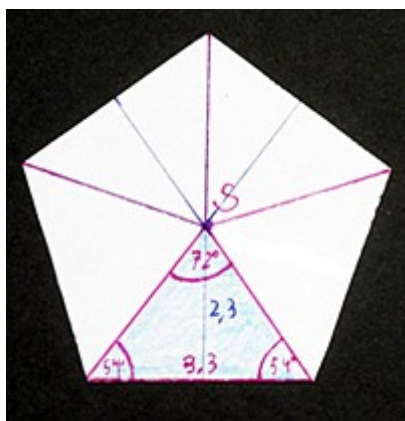
délka hrany dvanáctistěnu = 3,3 cm
výška v trojúhelníku = 2,3 cm
váha jednoho cm² papíru = 0,023 g

$$S_{\text{spoč}} = 5 \cdot 12 \cdot 3,3 \cdot 2,3 : 2 \doteq 228 \text{ cm}^2$$

$$m = (4,80 + 4,79 + 4,78) : 3 = 4,79 \text{ g}$$

$$S_{\text{váha}} = 4,79 : 0,023 \doteq 208 \text{ cm}^2$$

$$\text{rozdíl} = 20 \text{ cm}^2 = \frac{2000}{228} \% \text{ z } S_{\text{spoč}} \doteq 9 \% \text{ z } S_{\text{spoč}}$$



Další pětiúhelníky už nemůžu přidat, protože by se mi tam nevešly. Příští na řadě jsou šestiúhelníky, ty ale ve třech tvoří placku, takže ani je nemůžu použít, ani sedmiúhelníky a další. Tím pádem už nejdou udělat žádná jiná n-úhelníková tělesa. Platónských těles je jenom pět.

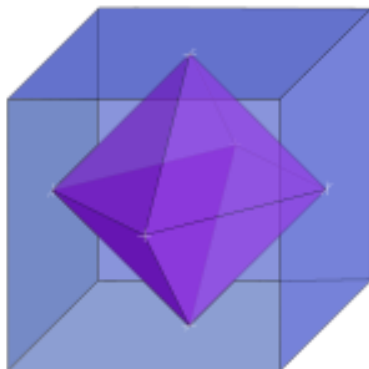
Rozdíly mezi měřenými povrchy a vypočítanými povrchy rostly s tím, jak se zmenšovala délka hran. Je to proto, že když u velikého tělesa zaokrouhlím na celý milimetr, tak se skoro nic nestane, ale když zaokrouhlím z 0,9 centimetrů na 1 centimetr, tak je to rozdíl o celých 10 %.

V této tabulce mám u každého platónského tělesa napsáno, kolik má hran, vrcholů a stěn:

	čtyřstěn	osmistěn	dvacetistěn	krychle	dvanáctistěn
stěny	4	8	20	6	12
vrcholy	4	6	12	8	20
hrany	6	12	30	12	30

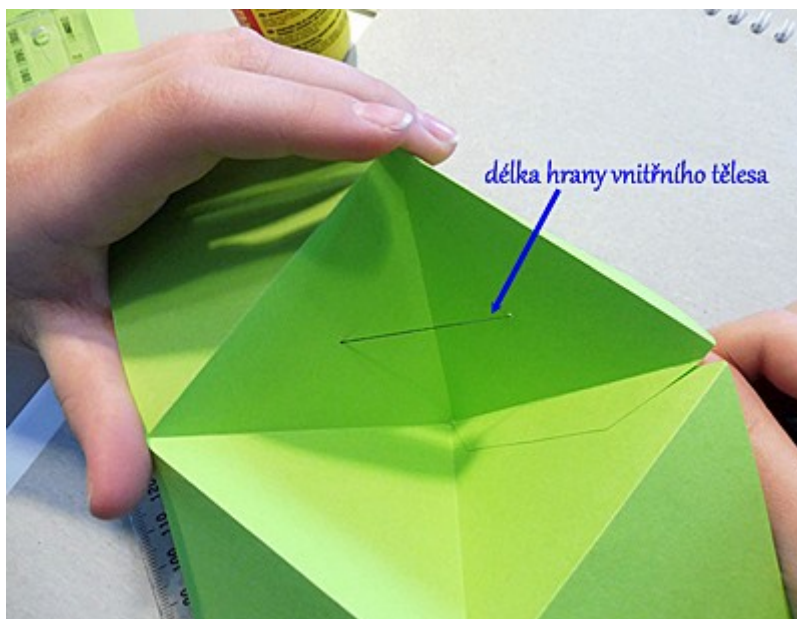
Z tabulky jsem vykoukala dvě pravidla:

První pravidlo: Když u jakéhokoli tělesa v tabulce prohodím počet stěn a vrcholů, vyjde mi počet stěn a vrcholů jiného tělesa, tomu se říká, že jsou **duální**. Osmistěn je podle tabulky duální s krychlí, dvacetistěn s dvanáctistěnem a čtyřstěn je duální sám se sebou. Prohodit stěnu s vrcholem znamená, že doprostřed stěny udělám tečku a ta bude vrcholem nového tělesa. Když spojím středy stěn krychle, vyjde mi opravdu osmistěn:

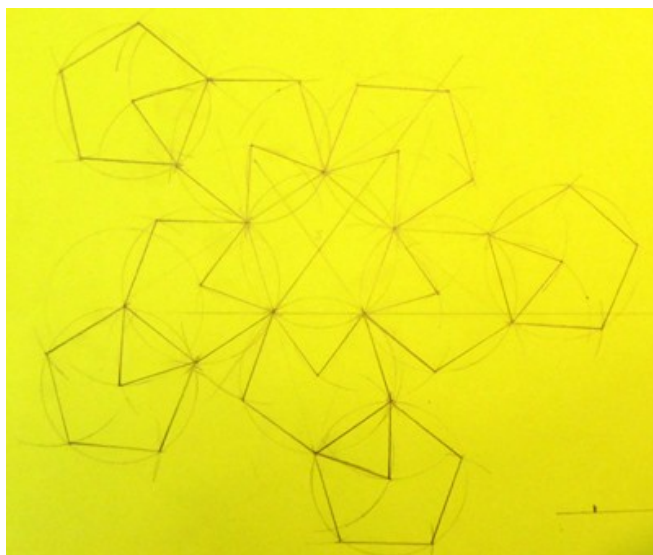
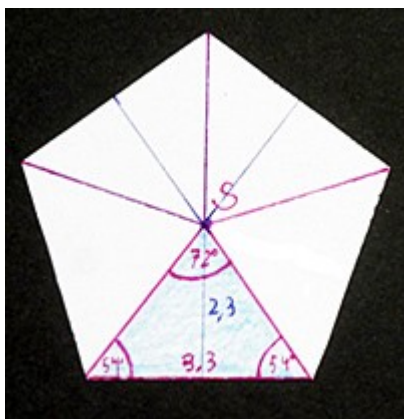


(https://math.wikia.org/wiki/Dual_polyhedron)

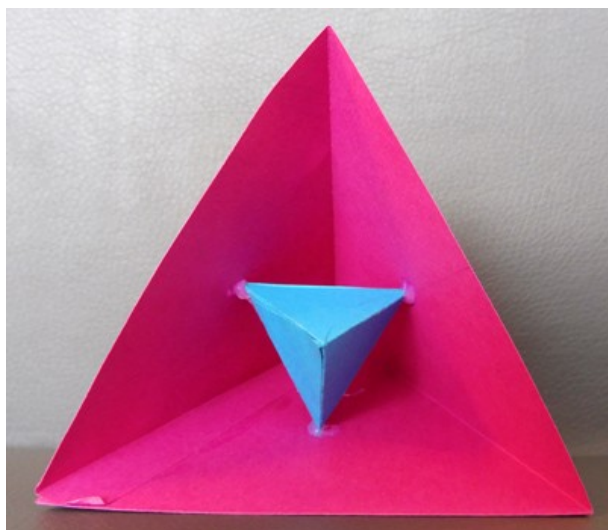
Duální tělesa jsem vyrobila i z papíru. Nejdříve jsem udělala veliké první těleso, například dvacetistěn. Potom jsem si vyznačila středy dvou sousedících stěn a protáhla jsem jimi nitku, kterou jsem zvenku ustříhla a změřila jsem její délku. Výsledek jsem použila jako délku hrany tělesa, které jsem pak vlepila dovnitř tavnou pistolí:



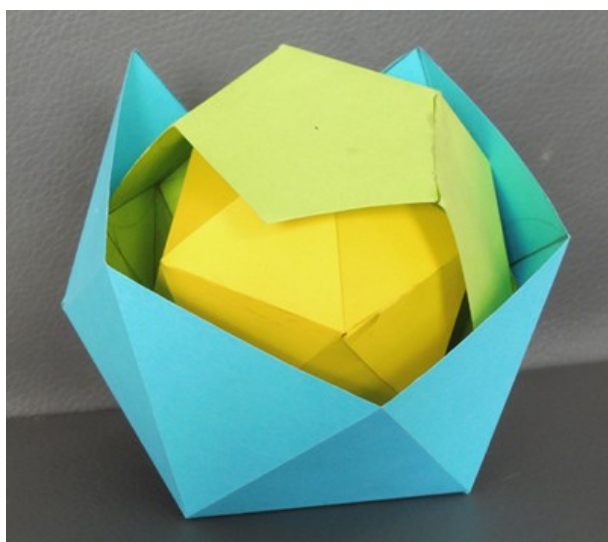
Takto jsem vyrobila čtyřstěn v čtyřstěnu, osmistěn v krychli v osmistěnu a dvacetistěn v dvanáctistěnu v dvacetistěnu. Některé stěny jsem vynechávala, aby bylo vidět dovnitř. Bylo to pro mě přiměřeně obtížné, až na dvanáctistěn, ten mi dal pořádně zabrat, protože pětiúhelníky jsou složitější na narýsování a musela jsem jich tam dát deset (dva jsem vynechala, aby bylo vidět dovnitř). Rýsovala jsem ho tak, že jsem udělala jednu hranu, potom jsem si na ní odměřila na obou koncích úhel 54° a tam, kde se obě čáry potkaly, byl střed pětiúhelníku. Potom jsem pouze odměřila pomocí kružítky zbývající čtyři trojúhelníkové díly. To jsem zopakovala desetkrát:



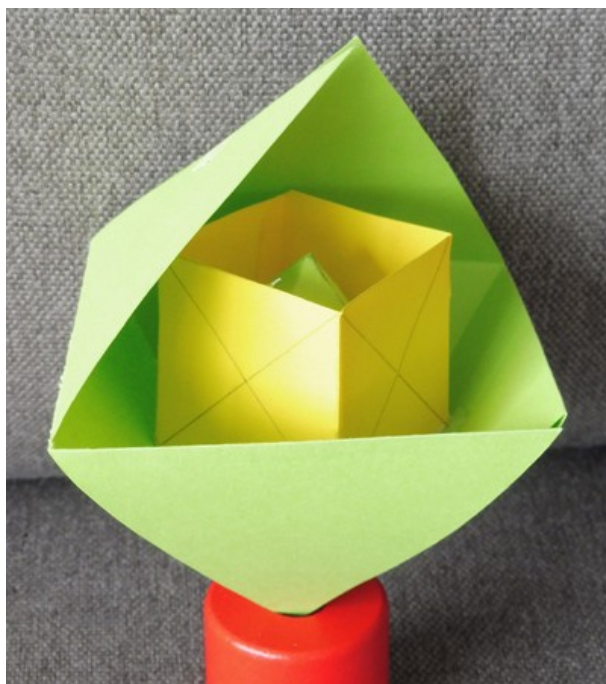
Jinak mi to šlo a byla to zábava:



čtyřstěn v čtyřstěnu



dvacetistěn v dvanáctistěnu v dvacetistěnu



osmistěn v krychli v osmistěnu

Druhé pravidlo z tabulky: Když u platónského tělesa sečtu počet stěn a vrcholů, vyjde mi o dva víc než počet hran.

$\text{počet hran} + 2 = \text{počet stěn} + \text{počet vrcholů}$
--

Tomuto pravidlu se říká **Eulerova věta**. Platí nejen pro platónská tělesa, ale i pro všechny konvexní mnohostěny (těleso, co má stěny z n-úhelníků a nemá žádné díry ani promáčkliny).

Já můžu dokázat, že Eulerova věta platí pro všechny pravidelné konvexní jehlany a hranoly. Použiju způsob, kterému se říká matematická indukce. Udělám to tak, že všechny existující jehlany seřadím od nejjednoduššího po nejsložitější, nejdříve je jehlan s trojúhelníkovou podstavou, potom jehlan s čtvercovou podstavou, potom jehlan s pětiúhelníkovou podstavou atd. atd. atd. U nejjednoduššího jehlanu udělám zkoušku, jestli pro něj Eulerova věta platí. A potom zkontroluji, jestli když přidám stěnu (udělám třeba z jedenáctibokého jehlanu dvanáctiboký), tak jestli mi to pokazí platnost Eulerovy věty nebo ne.

Zkouška pro nejjednodušší jehlan:



Čtyřstěn má čtyři stěny, šest hran a čtyři vrcholy. Sečtu počet stěn a vrcholů a podívám se, jestli se to rovná počtu hran zvětšenému o dva:

$$4 + 4 \stackrel{?}{=} 6 + 2$$

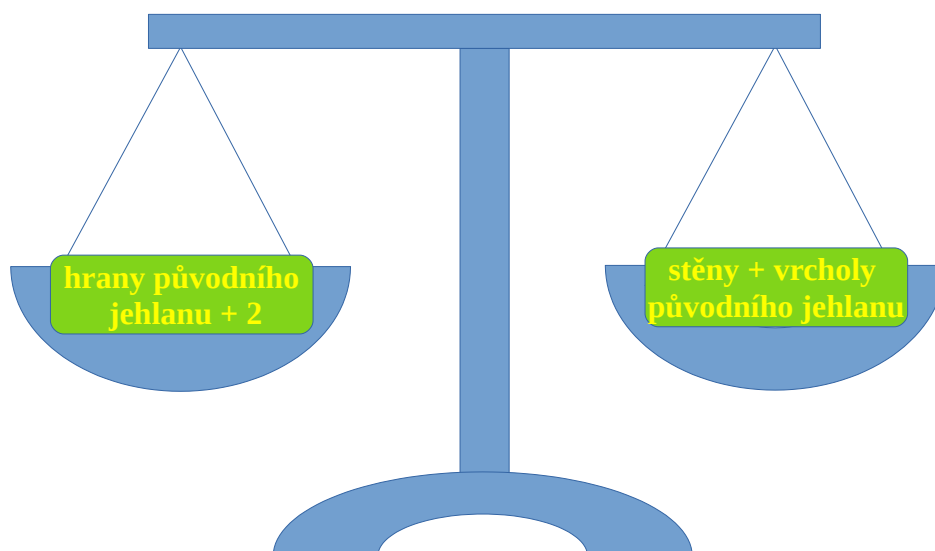
$$8 = 8$$

Pro čtyřstěn Eulerova věta platí.

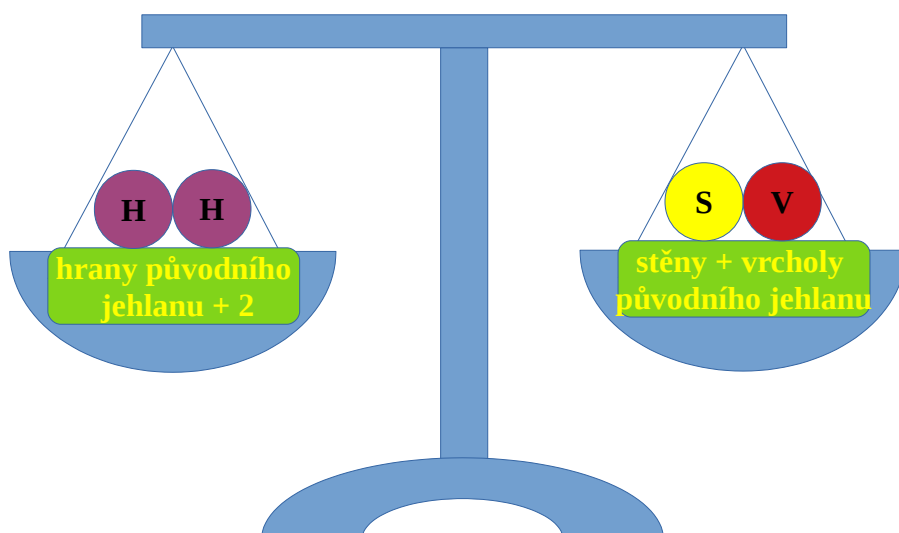
Zkouška pro přidání stěny: Udělám z jedné stěny jehlanu dvě stěny, takže z podstavy ve tvaru n -úhelníku bude $(n+1)$ -úhelník. Tím přibudou: 1 stěna, 1 vrchol a 2 hrany (na fotce žlutě):



Ted' vyzkouším, jestli přidané stěny, hrany a vrcholy nekaží platnost Eulerovy věty. V původním jehlanu věta platí a váhy jsou vyrovnané:



Ted' přejdu k novému jehlanu, to znamená, že přidám dvě hrany, jeden vrchol a jednu stěnu:



Protože jsem na obou stranách přidala stejně, tak jsou váhy pořád vyvážené a přidáním další stěny se platnost Eulerovy věty nepokazila.

Tím jsem dokázala, že Eulerova věta platí pro všechny pravidelné jehlany v řadě, protože pro ten první platí a když přejdu na další, tak se platnost nepokazí a když přejdu na další a na další... tak se platnost stále přenáší.

Ted' totéž dokážu pro pravidelné konvexní **hranoly**. Začnu zkouškou pro nejjednodušší hranol:



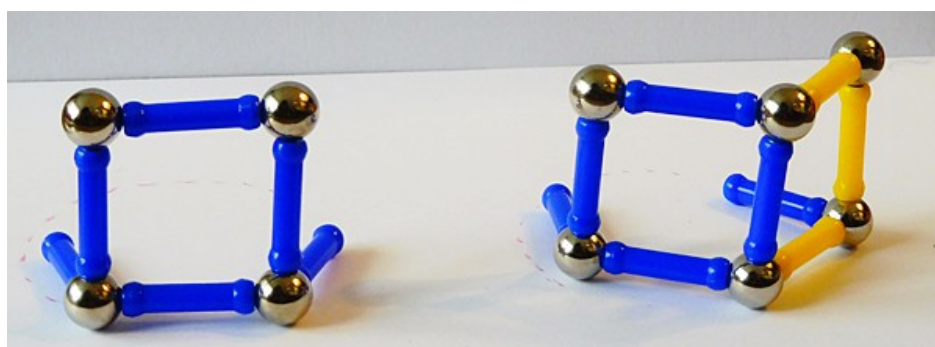
Tříboký hranol má pět stěn, devět hran a šest vrcholů. Sečtu počet stěn a vrcholů a podívám se, jestli se to rovná počtu hran zvětšenému o dva:

$$5 + 6 \stackrel{?}{=} 9 + 2$$

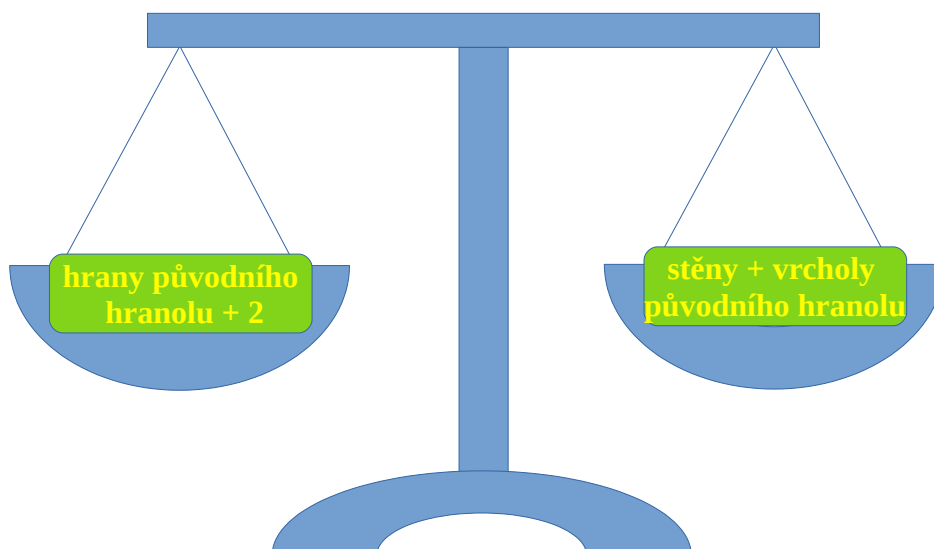
$$11 = 11$$

Pro nejjednodušší hranol Eulerova věta platí.

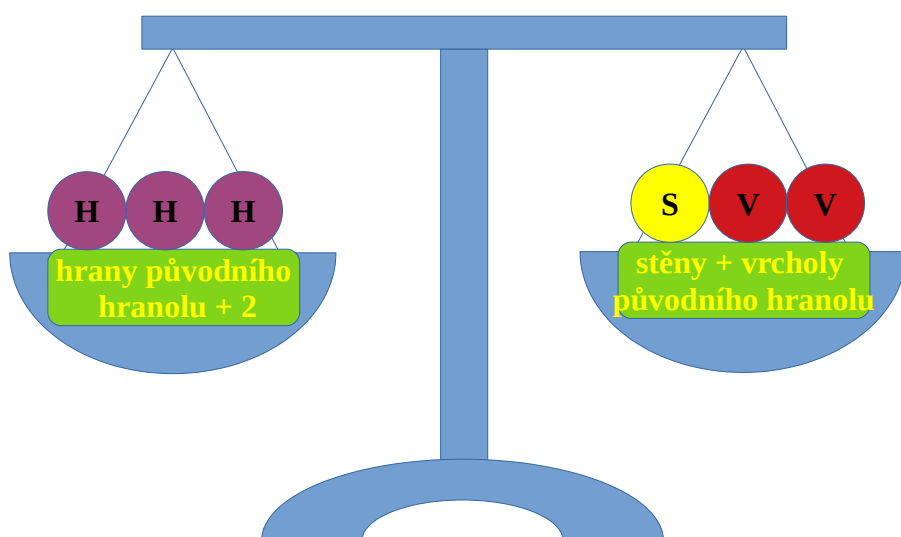
Zkouška pro přidání stěny: Udělám z jedné stěny hranolu dvě stěny, takže z podstavy ve tvaru n-úhelníku bude (n+1)-úhelník. Tím přibudou: 1 stěna, 2 vrchol a 3 hrany (na fotce žlutě):



Ted' vyzkouším, jestli přidané stěny, hrany a vrcholy nekazí platnost Eulerovy věty. V původním hranolu věta platí a váhy jsou vyrovnané:



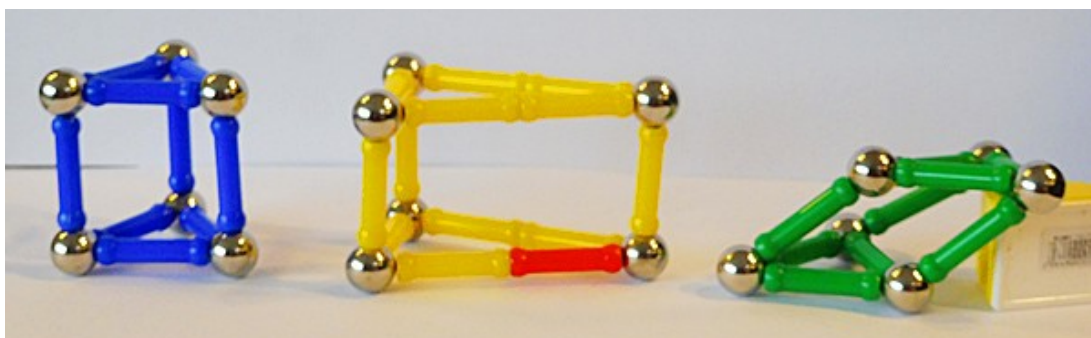
Ted' přejdu k novému hranolu, to znamená, že přidám tři hrany, dva vrcholy a jednu stěnu:



Protože jsem na obou stranách přidala stejně, tak jsou váhy pořád vyvážené a přidáním další stěny se platnost Eulerovy věty nepokazila.

Tím jsem dokázala, že Eulerova věta platí pro všechny pravidelné hranoly v řadě, protože pro ten první platí a když přejdu na další, tak se platnost nepokazí a když přejdu na další a na další... tak se platnost stále přenáší.

Tohle jsem dělala pro kolmá pravidelná konvexní tělesa. Šlo by to ale udělat i s kosým hranolem nebo jehlanem, protože to jen protáhnu či zkrátím některé hrany, ale počet hran, stěn a vrcholů se tím nezmění. Stejně bude fungovat, když bude podstava nepravidelný n -úhelník. Z toho vyplývá, že jsem **Eulerovu větu dokázala pro všechny konvexní hranoly a jehlany**.

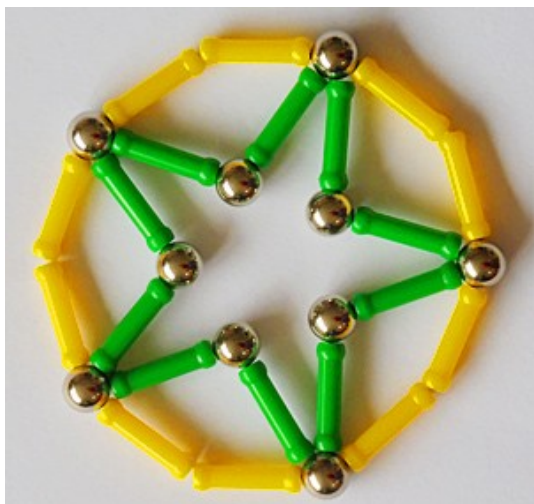


trojboký hranol pravidelný, nepravidelný a sešlápnutý



čtyřboký jehlan pravidelný, nepravidelný a sešlápnutý

Otázka ale je: Šlo by to dokázat i pro některé **nekonvexní** hranoly/jehlany?



Na obrázku je pěticípá hvězda a desetiúhelník kolem ní. Pěticípá hvězda je totiž hodně promáčkáný desetiúhelník. Pro hranol/jehlan s desetiúhelníkovou podstavou Eulerova věta platí, takže když chci z desetiúhelníkové podstavy udělat hvězdičkovou podstavu, prostě jen některé vrcholy promáčknu dovnitř. Počet vrcholů, hran a stěn se tím nezmění, tudíž bude věta platit i pro hvězdičkovou podstavu.

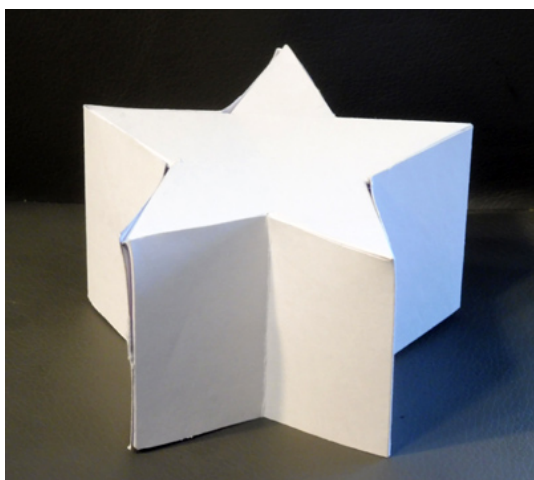
Vyrobila jsem tedy hranol s hvězdovou podstavou z papíru. Měl 12 stěn, 20 vrcholů a 30 hran.

Ověření Eulerovy věty:

$$12 + 20 \stackrel{?}{=} 30 + 2$$

$$32 = 32$$

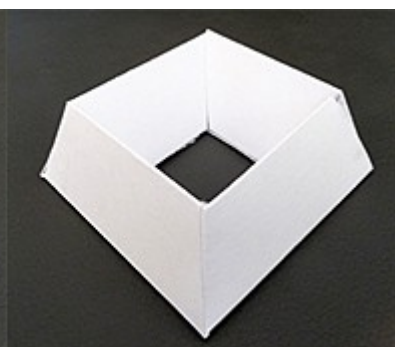
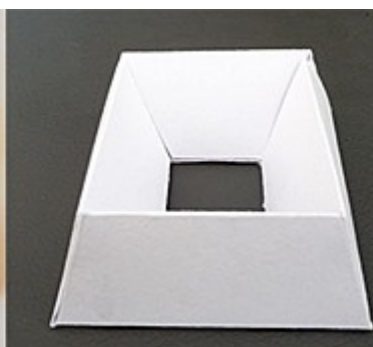
Eulerova věta pro tento hranol platí, přestože není konvexní.



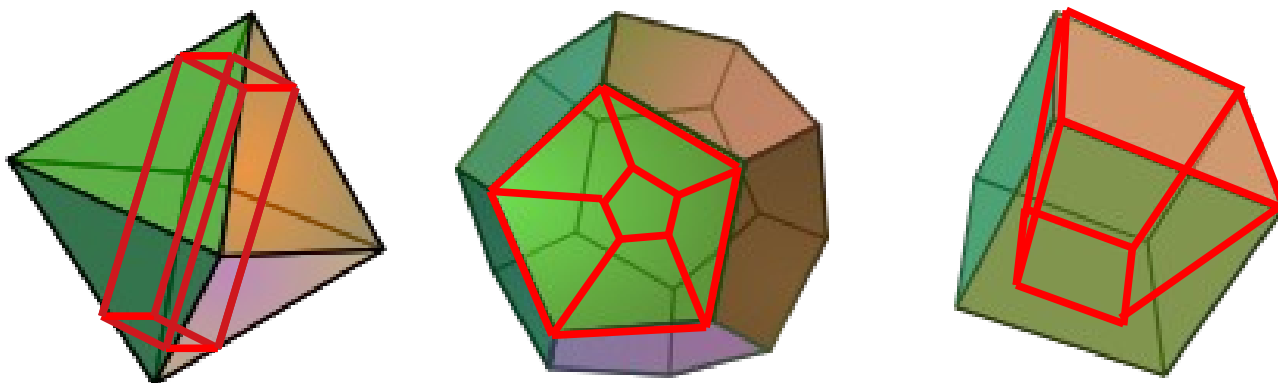
Na závěr jsem složila těleso, pro které Eulerova věta **neplatí**. Je to hranol s rozšiřující se dírou skrz. Má 9 stěn, 12 vrcholů a 20 hran. Ověřím Eulerovu větu:

$$9 + 12 \stackrel{?}{=} 20 + 2$$

$$21 \neq 22$$



Eulerova věta nevychází o jedna, jelikož původně to byl jehlan a já jsem mu sebrala jeden vrchol. Tudíž když chci z tělesa, které splňuje Eulerovu větu, vytvořit těleso, které ji nesplňuje, musím udělat v tělese takovou díru, že zmizí stěna nebo vrchol:



(původní obrázky těles jsem zkopírovala z https://cs.wikipedia.org/wiki/Plat%C3%B3nsk%C3%A9_t%C4%9Bleso)

8. Jak vyměřit draka

Některé věci ale vypočítat nejdou. Proto na ně musím použít metody měření, které jsem používala k ověřování (vážení a ponořování do vody). Jako dva nevypočitatelné objekty tu mám nakresleného papírového draka a draka z fimo. Budu chtít zjistit povrch nakresleného draka a objem fimo draka. Nakresleného draka obkreslím a zvážím, fimo draka ponořím do vody.



Příklad 8.1: Nakreslený drak

Nakresleného draka jsem změřila dvěma způsoby:

První způsob byl vážení – obkreslila jsem draka, vystříhla jsem obkresleného draka a zvážila jsem ho. Jeden centimetr čtvereční papíru vážil 0,0193 gramů a drak vážil 0,562 gramů. Plocha draka tedy je $0,562 : 0,0193 = 29,6 \text{ cm}^2$.

Druhý způsob byl vybarvování čtverečků – obkreslila jsem draka na čtverečkovaný papír. Potom jsem vybarvila všechny celé čtverečky a některé necelé čtverečky a všechny jsem je spočítala. Vyšlo mi 102 čtverečků, jeden čtvereček byl čtvrtina centimetru čtverečního. Plocha draka tedy je $102 : 4 = 25,5 \text{ cm}^2$.

Výsledky obou výpočtů byly docela podobné. Vážení je přesnější, protože při počítání čtverečků jsem hlavně odhadovala, které necelé čtverečky vybarvit a které ne.



Příklad 8.2: Fimo drak

Fimového draka jsem ponořila do vody a podívala jsem se, kolik vody vytlačil. Drak vytlačil 10 až 20 mililitrů, takže měl objem 10 až 20 centimetrů krychlových.

Z bezpečnostního listu fima jsme zjistily, že jeden centimetr krychlový fima váží 1,2 až 1,4 gramů (hustota). Fimového draka jsem tedy zvážila a vážil 21,3 gramů. $21,3 : 1,3$ (průměr hustoty) = 16 cm^3 . Kdybych se nemohla podívat na hustotu, vymodelovala bych z fima kostičku o rozměrech $1 \times 1 \times 1 \text{ cm}$ a pak bych ji zvážila.

Drak měl při ponořování výsledek 10 až 20 cm^3 , při vážení 16 cm^3 , to by tak odpovídalo.



9. Závěr

V této výzkumné zprávě jsem se naučila nebo procvičila:

- spočítat obsah a objem hranatých těles
- ověřovat výpočty pomocí ponořování a vážení
- počítat složitější útvary po částech
- spočítat obsah trojúhelníka
- spočítat obsah kruhu
- co je to π
- spočítat objem válce
- spočítat objem složitějších tvarů
- počítat povrchy
- rýsovat a slepovat papírové modely
- co jsou to platónská tělesa
- vyrobit modely duálních těles
- co je to Eulerova věta
- co je to matematická indukce a jak se s ní dokazuje
- počítat s desetinnými čísly
- počítat rozdíl v procentech
- dělat graf
- prokládat skrz body přímku
- kreslit tvary v textovém editoru
- psát do sloupců
- vytvořit tento odrážkový seznam
- vytvořit obsah
- psát podle Jungmannovy češtiny
- využít funkci „Najít a nahradit“

Negwijce mě při wytvářeníj této zpráwy bawilo ponořováníj těles do odměrky s wodau.

Wšechny obrázky, u kterých nenj uveden autor, wytvořila RNDr. Hana Böhmowá, Ph.D. (máma). Také se postarala o část formátováníj textu.

