Text jsem 17. října 2012 v reakci na pokračující diskuse aktualizoval závěrečnými poznámkami.

Dva pohledy na úlohu 14

Na diskusních fórech eduin.cz a ceskaskola.cz se vedou spory o interpretaci zadání úlohy 14 v základní úrovni podzimního didaktického testu z matematiky 2012.

Oficiální zadání:
Auto vyjíždělo na cestu s polovinou nádrže. Po 100 kilometrech jízdy zbývala ještě třetina nádrže a při příjezdu do cíle jen pětina nádrže. Spotřeba paliva je přímo úměrná ujeté vzdálenosti. Vypočítejte, kolik kilometrů auto ujelo.
Zdroj: http://www.novamaturita.cz/index.php?id_document=1404035938&at=1

Oficiální řešení: *180 km*
Zdroj: http://www.novamaturita.cz/index.php?id_document=1404035962&at=1

Celý spor je veden o interpretaci slova **spotřeba**. Tu zjevně někteří lidé (včetně autora testu) chápou jako **celkové množství spotřebovaného paliva** (tedy například v litrech).

Kritici upozorňují na to, že spotřeba v kontextu jízdy automobilem bývá spíše chápána jako **množství paliva spotřebovaného na ujetí určité vzdálenosti** (tedy například v litrech na 100 km). Takto je ostatně definováno heslo spotřeba automobilu také na Wikipedii.

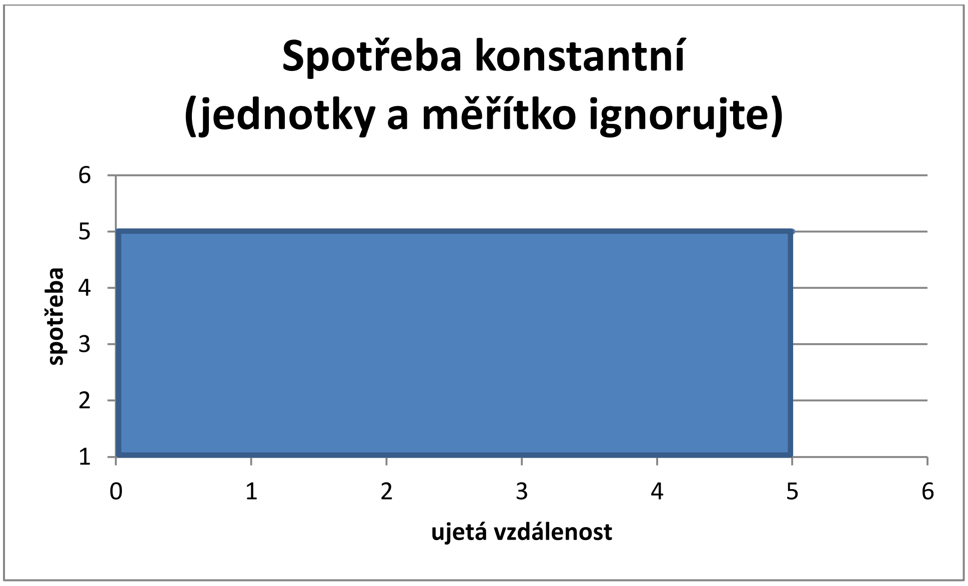
Nechci tímto článkem rozhodovat, kdo má pravdu. Pouze chci ukázat, že oba přístupy vedou k jednoznačné odpovědi a tyto odpovědi se neshodují. V závěrečných poznámkách se ještě věnuji úvahám nad důsledky této nešikovnosti v zadání a dalším souvislostem.

Varianta I

Podle prvního přístupu je spotřeba (chápaná dle Wikipedie) konstantní, v grafu je vodorovná úsečka:

Celkové množství spotřebovaného paliva lze pak vyjádřit jako obsah pod grafem. Obrazcem je obdélník, takže obsah vypočítáme jako součin stran:

spotřebované palivo = spotřeba × ujetá vzdálenost



Označíme-li míru naplnění nádrže jako $V(x)$, pak dle zadání

$$V(0)=\frac{1}{2}$$

$$V(100)=\frac{1}{3}=\frac{1}{2}-K\cdot 100$$

$$V(x)=\frac{1}{5}=\frac{1}{2}-K\cdot x$$

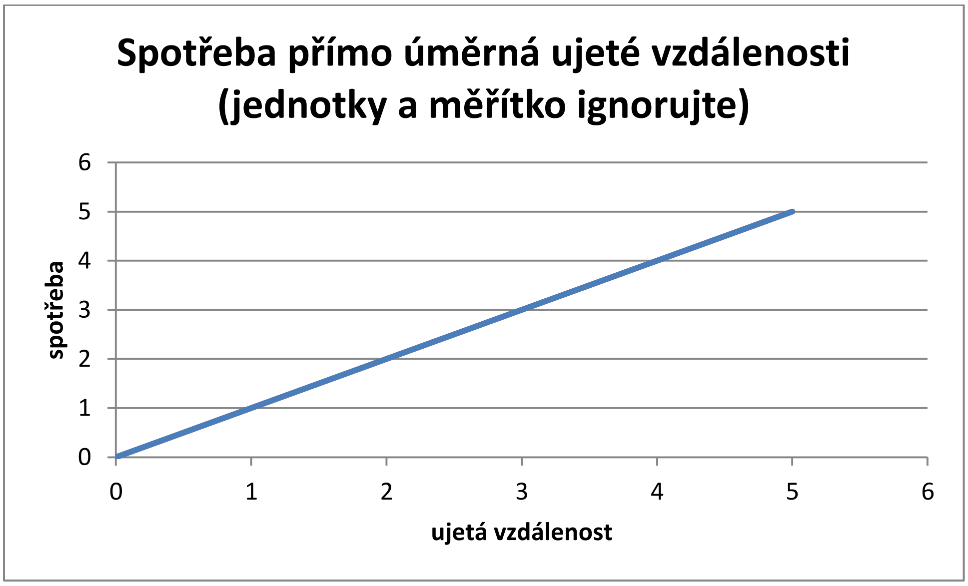
Z druhé rovnice určíme konstantu K: $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=K\cdot 100$, tedy $K=\frac{1}{600}$.

Dosadíme K do třetí rovnice a vypočítáme x: $\frac{1}{5}=\frac{1}{2}-\frac{1}{600}\cdot x$, tedy $x=180$

Závěr: Auto ujelo 180 km.

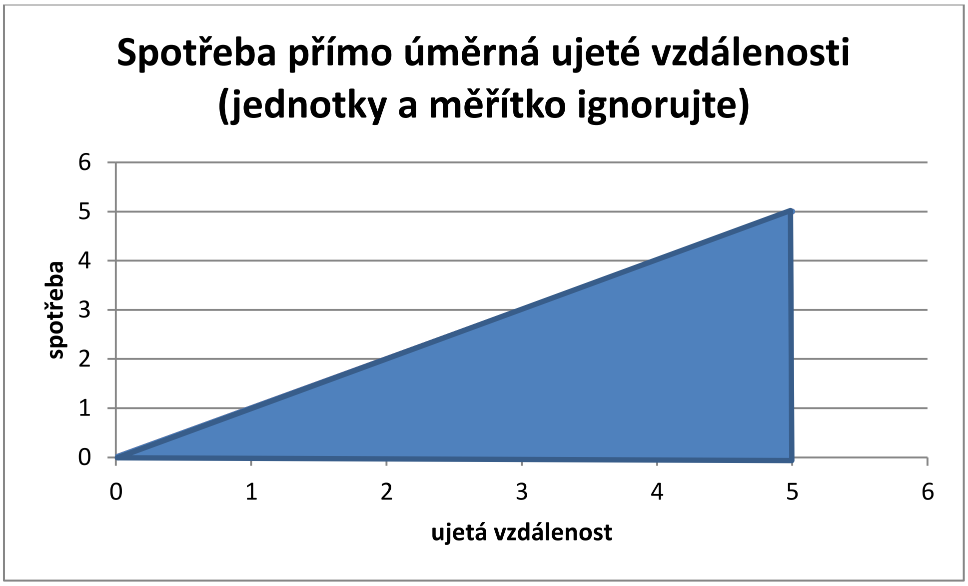
Varianta II

Podle druhého přístupu je spotřeba (chápaná dle Wikipedie) přímo úměrná ujeté vzdálenosti, v grafu je úsečka, která prochází nulou a není vodorovná:



I zde lze celkové množství spotřebovaného paliva vyjádřit jako obsah pod grafem. Obrazcem je trojúhelník, takže obsah spočítáme jako polovinu součinu základny a výšky:

spotřebované palivo = 0,5 × ujetá vzdálenost (základna) × výška



Výška v našem vztahu ovšem závisí na sklonu úsečky. Matematicky to lze vyjádřit takto:

výška = K × ujetá vzdálenost (čím větší K, tím rychlejší nárůst spotřeby s ujetou vzdáleností)

Vztah pro celkové množství spotřebovaného paliva pak lze napsat také takto:

spotřebované palivo = 0,5 × K × (ujetá vzdálenost)^2

Označíme-li míru naplnění nádrže jako $V(x)$, pak dle zadání

$$V(0)=\frac{1}{2}$$

$$V(100)=\frac{1}{3}=\frac{1}{2}-0{,}5\cdot K\cdot 100^2$$

$$V(x)=\frac{1}{5}=\frac{1}{2}-0{,}5\cdot K\cdot x^2$$

Z druhé rovnice určíme konstantu K: $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=0{,}5\cdot K\cdot 100^2$, tedy $K=\frac{1}{3\cdot 10^4}$.

Dosadíme K do třetí rovnice a vypočítáme x: $\frac{1}{5}=\frac{1}{2}-0{,}5\cdot\frac{1}{3\cdot 10^4}\cdot x^2$, po úpravách $\frac{3}{5}\cdot 3\cdot 10^4=x^2$,

tedy $x=\sqrt{\frac{18}{10}}\cdot 100 \doteq 134$

Závěr: Auto ujelo přibližně 134 km.

Poznámky na závěr

Nelze žádným důvěryhodným způsobem vyloučit, že tato dvojznačnost v zadání někomu přinejmenším sebrala čas, který mohl využít v jiných úlohách. Mohla ho ovšem poškodit ještě více – vyvedením z míry a zvýšením nervozity s negativním dopadem na další soustředění.

Navíc vůbec není jisté, zda by CERMAT výsledek 134 km uznal. Kdyby se k němu ovšem student dokázal dopracovat – potíž je totiž v tom, že řešení alternativní interpretace zadání je náročnější jak na přemýšlení a dovednosti, tak na počet technických chyb, kterých se lze po cestě dopustit. Z mnou prezentovaného pečlivě a názorně (doufám) sepsaného řešení je myslím ten významný rozdíl v náročnosti vidět. Student ovšem neměl několik hodin času na vymýšlení a pečlivé sepisování, jako jsem je měl já. Kdyby tedy býval pochopil zadání druhým způsobem, nejspíše by se do řešení zapletl, případně by to po nějaké době prostě vzdal.

Někdo by mohl namítat, že přece každému rozumnému člověku musí být jasné, že spotřeba (v litrech na 100 km) přímo úměrná vzdálenosti je fyzikální nesmysl. Jenže hned v úloze 22 úplně stejného testu (!) je také naprostý nesmysl – a nikomu to nevadí. Jde tam o odpis počítače, ale na rozdíl od reálně používaných způsobů odepisování majetku autor do této úlohy uměle napasoval geometrickou posloupnost, aby „to bylo jako ze života“. To, že takový způsob odepisování je zcela nesmyslný (povšimněte si také, že se nikde nepoužívá), se zde jaksi přehlíží v zájmu prozkoušení studenta z příslušné látky.

CERMAT v úloze 22 předkládá úplný nesmysl, ale prostě to tak definoval, takže se podle toho má počítat, kdežto když v úloze 14 předkládá úplný nesmysl, tak to má každému dojít (že taková interpretace je nesmysl) a zvolit interpretaci reálnější, přestože to je proti jazykové zkušenosti značného počtu lidí. Přístup CERMATu mi připadá v tomto nekonzistentní.

Nevím, jak moc tato úloha doopravdy studentům zamotala hlavy. Patrně většině z nich moc ne, případně vůbec ne. Jestli na někoho snad negativně dopadla, tak na přemýšlivější jedince. To ale vůbec nemusejí být „jedničkáři“. Sám ze své praxe znám řadu hloubavých studentů schopných přicházet se skvělými a neobvyklými myšlenkovými postupy – tito studenti ovšem ne vždy patří mezi klasické matematické premianty. Je tedy bohužel možné, že ztráta času, klidu a bodů může nejen způsobit snížení známky třeba z jedničky na dvojku, ale také ze čtyřky na pětku, což už je velmi vážné.

Bohužel se nyní mohou (a jistě i budou) někteří neúspěšní studenti schovávat za tuto a jí podobné úlohy, ačkoliv třeba ani nemusejí chápat, v čem vůbec ten problém spočívá. Protože ale nemůžeme rozhodnout, kdo z nich jen využívá „díru“ a kdo skutečně byl neobratným zadáním poškozen, asi bychom měli ctít „presumpci neviny“ a prostě tuto úlohu případným odvolávajícím se studentům nepočítat. Domnívám se, že škoda vzniklá neoprávněným uznáním jedné úlohy je menší, než škoda, která by vznikla, kdybychom oprávněný nárok studenta zamítli.