



POZIČNÍ SOUSTAVY

Tomáš Böhm

jaro 2024

Obsah

Úvod - desítková soustava.....	5
Zápis čísla.....	5
Porovnání čísel a počítání.....	5
Jiné zápisy čísel.....	5
Dvojková soustava.....	6
Zápis čísla.....	6
Převod mezi dvojkovou a desítkovou soustavou.....	6
Porovnávání.....	8
Sčítání.....	8
Odčítání.....	9
Násobení.....	9
Dělení.....	10
Některé vlastnosti čísel.....	11
Desetinná čísla.....	11
Číslo $0, \bar{1}_2$	12
Nekonečný součet.....	13
Odbočka do desítkové soustavy.....	14
Trojková soustava.....	14
Zápis čísla a převody.....	14
Počítání.....	15
Některé vlastnosti čísel.....	16
Desetinná čísla.....	16
Číslo $0, \bar{1}_3$ a nekonečný součet.....	17
Čtyřková soustava.....	18
Zápis čísla a převody.....	18
Počítání.....	18
Některé vlastnosti čísel.....	19
Desetinná čísla.....	20
Číslo $0, \bar{1}_4$ a nekonečný součet.....	20
Pětková soustava.....	21
Počítání.....	21
Některé vlastnosti čísel.....	22
Desetinná čísla.....	22
Číslo $0, \bar{1}_5$ a nekonečný součet.....	23
Šestková soustava.....	24
Počítání.....	24
Některé vlastnosti čísel.....	25
Desetinná čísla.....	26
Číslo $0, \bar{1}_6$ a nekonečný součet.....	26
Eridiané.....	27
Šestnáctková soustava.....	27
Číslo $0, \bar{1}_{16}$ a nekonečný součet.....	28
Shrnutí.....	28
Co závisí na soustavě?.....	28
Co mají všechny soustavy společného?.....	29
Nekonečné součty.....	29
Závěr.....	31

Úvod - desítková soustava

Zápis čísla

Číslo 2724 se přečte dva tisíce sedm set dvacet čtyři. To ukazuje, kolik kterých čísel tam je. V čísle 2724 jsou **dva** tisíce $2 \cdot 1000$, **sedm** stovek $7 \cdot 100$, **dvě** desítky $2 \cdot 10$ a **čtyři** jednotky $4 \cdot 1$.

$$2724 = 2 \cdot 1000 + 7 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 4 \cdot 1 = 2 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$$

Jmenuje se to desítková soustava, protože se čísla skládají z mocnin deseti (1, 10, 100, 1000...). Lidi ji používají, protože mají deset prstů. K zápisu čísel používáme deset číslic: 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9.

Porovnání čísel a počítání

Kouknu se, které číslo je delší, a to delší je větší, protože má více číslic. Ale když jsou stejně dlouhá, tak se koukám zleva doprava. A kde se začnou lišit, tam se kouknu na ta dvě čísla, která se liší. A to, které má nižší číslici, je zároveň v menším čísle. Příklad: 1520 a 1500

1	5	2	0
1	5	0	0

První číslice je u obou čísel 1.

Druhá je u obou 5, takže se pořadí neliší.

Ale třetí číslice 2 a 0 se liší, takže která je větší? 2 nebo 0? No 2, takže číslo 1520 je větší než 1500.

V desítkové soustavě písemně sčítáme, odčítáme, dělíme a násobíme. Na násobení máme tabulku, tu se učíme nazpaměť a říká se jí násobilka.

Jiné zápisy čísel

V knihách se na označování stránek používají římská čísla, takže strana jedna je I, 2 II, 3 III, 4 IV atd. Na stavbě se k zápisu letopočtu taky někdy používají **římská čísla**. A ještě na starých hodinách jsou římskými čísly zapsány hodiny.

Římská čísla už nepoužíváme, protože se nedá jednoduše počítat s velkými čísly (písemně).

Nejjednodušší zápis čísel je udělat **čárek** jako čísel. Tak se počítalo už v pravěku.

$$3 = \text{III}$$

$$7 = \text{IIIIIIII}$$

$$7 + 3 = \text{IIIIIIII} + \text{III} = \text{IIIIIIIIIII}$$

Dnes se ještě používá **šedesátková soustava**, při měření času. 1 minuta je 60 sekund a 1 hodina je 60 minut. Takhle je to, protože 60 se dobře dělí.

Dvojková soustava

Zápis čísla

Ve dvojkové soustavě se čísla skládají z mocnin dvou: 1 2 4 8 16 32 64 atd. Číslo 1011 se v dvojkové soustavě přečte jedna nula jedna jedna. Žádné tisíce a tak.

Ve dvojkové soustavě se používají jen dvě číslice 1 a 0. Toto se hodí k programování, protože 1 a 0 mohou symbolizovat ano a ne.

Převod mezi dvojkovou a desítkovou soustavou

Když chci číslo 1011 převést **do desítkové soustavy**, tak si k němu napíšu pomocnou tabulku s mocninami dvou:

$$\begin{array}{cccc} 8 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

a vidím, že tu je 1 jednička, 1 dvojka, 0 čtyřek a 1 osmička. Sečtu to a mám převedeno. Výsledek je jedenáct:

$$1011_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 8 + 2 + 1 = 11_{10}$$

Když chci převést číslo **osmdesát tři** z desítkové soustavy **do dvojkové**, tak se musím podívat, které mocniny dvou se tam vejdou. Nejvyšší mocnina dvou, co se vejde do čísla 83, je 64. Zbude 19. Do devatenáctky se vejde číslo 16 a zbude 3, do trojky se vejde 2 a zbude 1. Takže:

$$83 = 64 + 16 + 2 + 1 = 2^6 + 2^4 + 2^1 + 2^0 = 1010011$$

Převedení můžu udělat i **pomocí obrázku**. Nakreslím si osmdesát tři teček. Potom je spojím po dvou. Zbude mi jedna tečka. Potom dvojice spojím do čtveřic. Zbude mi jedna dvojice. Pak čtveřice spojím do osmic. Už mi nezbyde žádná čtveřice. Následně osmice spojím do šestnáctic. Zase nic. Šestnáctice do dvaatřicetic. Ale pozor jedna šestnáctice mi zbyla. Potom dvaatřicetice na čtyřiašedesátice. Pořád nic? Ale na stodvacetiosmice už to spojit nejde.

Kouknu se na ty zbytky. Všechny tečky dohromady jsou: jedna tečka + jedna dvojice + jedna šestnáctice + jedna čtyřiašedesátice = 1 + 2 + 16 + 64 = 83

spojit po dvou

- při spojování zbyla 1 samotná tečka

spojit po čtyřech

- při spojování zbyla ještě 1 zelená dvojice (2 tečky)

spojit po osmi

- při spojování nezbylo nic nového

spojit po šestnácti

- při spojování nezbylo nic nového

spojit po dvaatřiceti

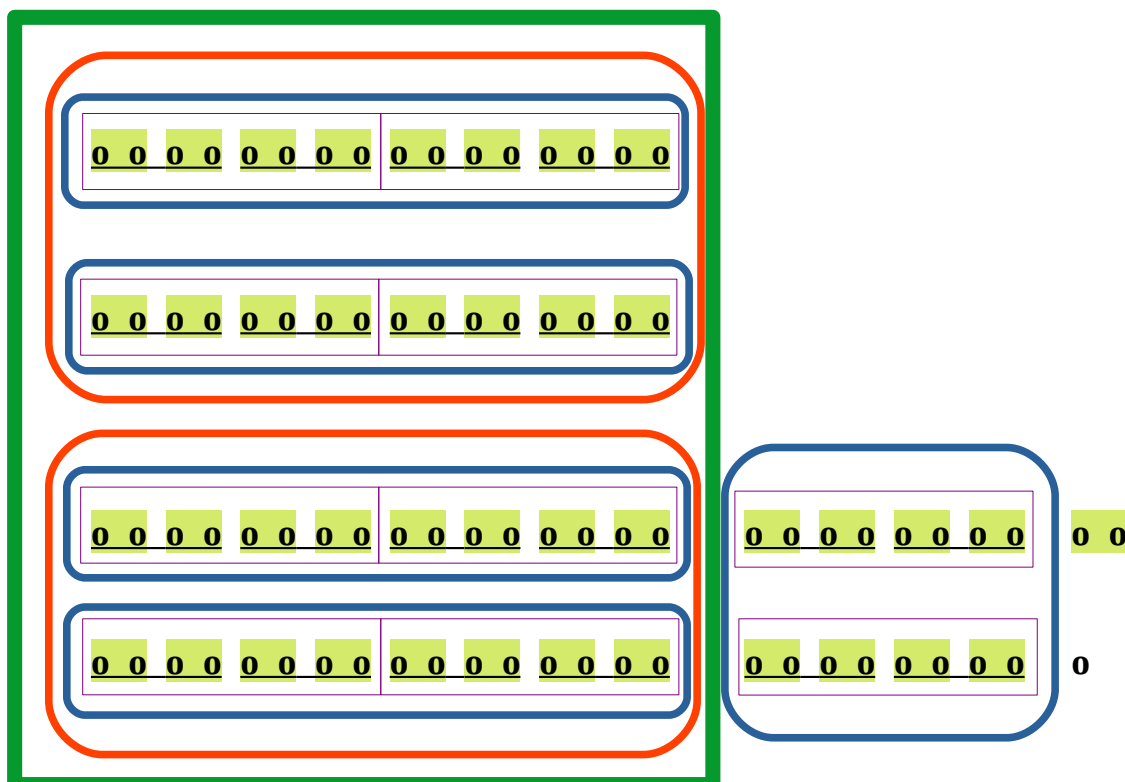
- při spojování zbyla ještě 1 modrá skupina (16 teček)

spojit po čtyřiašedesáti

- při spojování nezbylo nic nového

spojit po stoosmadvaceti

- při spojování zbyla ještě 1 zelená skupina (64 teček)



Místo spojování teček do dvojic a čtveřic můžu dělit dvěma a znova dvěma a tak dál. A výsledek je stejný. **Číslo pak složím z těch zbytků.** A jako bonus se neutečkuji při velkých číslech jako 1203. Takže když číslo 83 chci převést do dvojkové soustavy dělením, musím ho vydělit dvěma a napsat si zbytek. Výsledek pak zase vydělím dvěma a napíšu si zbytek. A tak dále, až je výsledek dělení 0:

83	:	2	=	41	zb	1
41	:	2	=	20	zb	1
20	:	2	=	10	zb	0
10	:	2	=	5	zb	0
5	:	2	=	2	zb	1
2	:	2	=	1	zb	0
1	:	2	=	0	zb	1

Převedené číslo napíše odzadu ze zbytků. Zase je to 1010011, stejně jako u minulých počítání.

Porovnávání

Kouknu se, které číslo je delší, a to delší je větší, protože má více číslic. Ale když jsou stejně dlouhá, tak se koukám zleva doprava, kde se začnou lišit. Pak se kouknu na ty dvě číslice, které se liší, a ta, která je nižší, je zároveň v menším čísle.

$$\begin{array}{r} 10110 \\ 10100 \end{array}$$

První číslice je u obou čísel 1.

Druhé je u obou 0, takže se pořadí neliší.

Třetí je 1.

Ale čtvrté číslice 1 a 0 se liší, takže které je větší? No 1, takže číslo 10110 je větší než 10100.

Sčítání

Ve dvojkové soustavě se sčítá stejně jako v desítkové. Dám si pod sebe obě čísla a sčítám podle tabulky:

sčítání	0	1
+ 0 =	0	1
+ 1 =	1	10

Příklady:

$$\begin{array}{r} 10 \\ \underline{1} \\ 11 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1011 \\ \underline{10} \\ 1101 \end{array}$$

Druhý příklad ověřím převedením do desítkové soustavy: $11+2 = 13$. $1101_2 = 13$. Správně!

Když je při sčítání více jedniček než dvě, tak je taky sečtu, takže čtyři jedničky jsou 100. Jako když dvě jedničky jsou 10. A pak je přepíšu. Druhá možnost je si přebývající jedničky napsat pod součet a pak součet s jedničkami zase sečíst.

$$\begin{array}{r} 101 \\ 111 \\ \underline{100} \\ 10000 \end{array} \qquad \text{druhá možnost:} \begin{array}{r} 101 \\ 111 \\ \underline{100} \\ 110 \\ \underline{11} \\ 10000 \end{array}$$

Kontrola: $5 + 7 + 4 = 16$. $10000_2 = 16$. Správně.

Odčítání

Odčítá se písemně jako v desítkové soustavě a používá se tabulka jako u sčítání. Speciální případ je, když mám 0 - 1. To se pak půjčí jednička k nule a z 0 je 10. A 10 - 1 už počítat umím. Ale jedničku musím vrátit, takže jedničku vrátím v dalším kroku příkladu na dolní číslo a přičtu ji:

$$\begin{array}{r} 110 \\ -011 \\ \hline 011 \end{array}$$

půjčím si 1, takže z 0 je 10
vrátím 1 a přičtu ji, takže z 1 je 10

odčítání	0	1
- 0 =	0	1
- 1 =	výsledek je 1 a půjčím si jedničku	0

Příklady:

$$\begin{array}{r} 111 \\ -11 \\ \hline 100 \end{array} \quad \begin{array}{r} 101 \\ -10 \\ \hline 11 \end{array} \quad \begin{array}{r} 10000 \\ -101 \\ \hline 1011 \end{array}$$

Kontrola posledního příkladu: $16 - 5 = 11$

Násobení

Násobí se taky stejně jako v desítkové. Dám si čísla pod sebe a postupně násobím. Pak výsledky sečtu a je to. Při násobení nahoru píšu delší číslo a dolů kratší, protože pak mi vznikne méně mezipříkladů.

násobení	0	1
· 0 =	0	0
· 1 =	0	1

Příklady:

$$\begin{array}{r} 101 \\ \cdot 10 \\ \hline 000 \\ 1010 \\ \hline 1010 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1110 \\ \cdot 111 \\ \hline 1110 \\ 1110 \\ 1110 \\ \hline 1110 \\ 110010 \end{array}$$

Kontrola druhého příkladu: $14 \cdot 7 = 98$. $1100010_2 = 2 + 32 + 64 = 98$. Správně.

Dělení

V dvojkové soustavě se dělí také stejně jako v desítkové. Vždycky vydělím, zjistím zbytek, připsu další číslo, vydělím atd... Funguje i dělení se zbytkem. A vtipné je, že jelikož je to dvojková soustava, tak se tam to číslo při dělení vejde jednou nebo nulakrát. Takže je počítání jednoduché.

Příklady:

$$\begin{array}{r} 10101 : 11 = \underline{\underline{111}} \quad \text{kontrola } 21 : 3 = 7 \\ \underline{-11} \\ 100 \\ \underline{-11} \\ 011 \\ \underline{-11} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1100100 : 101 = \underline{\underline{10100}} \quad \text{kontrola } 100 : 5 = 20 \\ \underline{-101} \\ 010 \\ \underline{-0} \\ 101 \\ \underline{-101} \\ 00 \\ \underline{-0} \\ 00 \\ \underline{-0} \\ 0 \end{array}$$

Dělení se zbytkem:

$$\begin{array}{r} 1111101 : 1000 = \underline{\underline{1111 \text{ zb. } 101}} \quad \text{kontrola } 125 : 8 = 15 \text{ zb. } 5 \\ \underline{-1000} \\ 1111 \\ \underline{-1000} \\ 1110 \\ \underline{-1000} \\ 1101 \\ \underline{-1000} \\ 101 \end{array}$$

Některé vlastnosti čísel

V desítkové soustavě		Ve dvojkové soustavě	
násobek deseti	končí nulou	násobek dvou	končí nulou
mocnina deseti	jednička a nuly (10000)	mocnina dvou	jednička a nuly (10000)
o jedna větší než mocnina deseti	jednička nuly a jednička (100001)	o jedna větší než mocnina dvou	jednička nuly a jednička (100001)
o jedna menší než mocnina deseti	samé devítky (99999)	o jedna menší než mocnina dvou	samé jedničky (11111)

Desetinná čísla

Desetinná místa slouží k vyjádření čísel menších než jedna. Takže desetín, polovin, čtvrtin, setin...

V desítkové soustavě: $2,731_{10} =$ dvě jednotky + sedm **desetin** + tři **setiny** + jedna **tisícina**

Ve dvojkové soustavě: $1,101_2 =$ jedna jednotka + jedna **polovina** + nula **čtvrtin** + jedna **osmina**

Převod desetinných čísel do dvojkové soustavy: nejdřív převedu celé číslo a pak se koukám, kolik se tam vejde polovin, čtvrtin, osmin, šestnáctin a tak dále.

$$4,5 = 4 + \frac{1}{2} = 100,1_2$$

$$3,75 = 3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 11,11_2$$

Na čísla jako 0,2 se musí takto: zjistím, jakým dělením jsem k němu přišel v desítkové soustavě a stejné dělení udělám ve dvojkové. V desítkové soustavě se k číslu 0,2 přijde výpočtem jedna děleno pěti. Jedna ve dvojkové je 1 a pět ve dvojkové je 101. Takže $1 : 101$.

$$0,2 = 2:10 = 1:5 = 1 : 10_2 = 0, \text{001100110011} \dots_2 = 0, \overline{0011}_2$$

$$\begin{array}{r}
 -0 \\
 \underline{10} \\
 -0 \\
 \underline{100} \\
 -0 \\
 \underline{1000} \\
 -101 \\
 \underline{0110} \\
 -101 \\
 \underline{0010}
 \end{array}$$

stejně číslo = opakování

Když se v dělení objeví příklad, který jsem už počítal (viz nahoře zeleně), tak už nemusím počítat. Stačí buď začít opisovat už vzniklý výsledek donekonečna, anebo udělat nad tím opakujícím se číslem čáru. Říkáme tomu, že to nadtrhnuté číslo je perioda. Periodické číslo se donekonečna opakuje za desetinou čárkou.

4,4 ve dvojkové soustavě:

Číslo vyjde dělením čtyřicet čtyři děleno deseti. To je v dvojkové $101100 : 1010$.

$$4,4 = 44 : 10 = 101100_2 : 1010_2 = 10 \underline{0,011} 0011 \underline{0011} 0011 \dots = 100, \overline{0110}_2$$

$$\begin{array}{r} \underline{-1010} \\ 10 \\ \underline{-0} \\ \mathbf{100} \\ \underline{-0} \\ 1000 \\ \underline{-0} \\ 10000 \\ \underline{-1010} \\ 1100 \\ \underline{-1010} \\ 00\mathbf{100} \end{array} \text{ stejné číslo = opakování}$$

Tohle číslo se taky opakuje, ale perioda je přes desetinou čárku. To nechci, tak si periodu posunu o jedno číslo dál. Takže místo $\underline{0011}$ bude $\underline{0110}$. Protože je toto číslo nekonečné, tak to nevádí.

Vidím, že taková krátká čísla jako 0,2 jsou v dvojkové soustavě většinou periodická.

0,3333... ve dvojkové soustavě

$$0,3333\dots = 1 : 3 = 1 : 11_2 = 0, \underline{01} 01 \underline{01} 01 \dots_2 = 0, \overline{01}_2$$

$$\begin{array}{r} \underline{-0} \\ \mathbf{10} \\ \underline{-0} \\ \mathbf{100} \\ \underline{-11} \\ \mathbf{10} \end{array} \text{ stejné číslo = opakování}$$

Číslo $0, \overline{1}_2$

Když na "poslední" pozici čísla $0,11111111\dots_2$ přidám jedničku, tak se to posčítá a nakonec vyjde jedna. Ale jelikož je toto číslo nekonečné, nemůžu tu jedničku nikam přidat. Tudíž je to asi o nekonečně malý kousek menší než jedna.

Zkusím to spočítat ještě nějak jinak: Dřív už jsem spočítal, že $0,2$ je ve dvojkové soustavě $0, \overline{0011}$. K $0, \overline{0011}$ přičtu $0, \overline{1100}$, aby se ta čísla sečetla a spojila se v $0, \overline{1111}$. A když tohle má být zároveň jedna, tak to druhé číslo musí být 0,8.

Je to opravdu 0,8? No zjistí se to dělením:

$$0,8 = 8:10 = 4:5 = 100 : 101 = 0,\overline{1100}_2$$

-00

1000

-101

0110

-101

0010

-00

100

-000

1000 stejné číslo = opakování

To znamená, že $0,8$ ve dvojkové je opravdu $0,\overline{1100}$. Tudíž $0,8 + 0,2 = 0,\overline{1111}$. Juchů! A protože $0,8 + 0,2$ je 1, tak $0,\overline{1111}$ je taky jedna. Konečně dokázané.

$$0,2 = 0,0011001100110011\dots_2$$

$$0,8 = 0,\overline{1100110011001100\dots}_2$$

sečtu dohromady:

$$1 = 0,1111111111111111\dots_2$$

$$\underline{\underline{1 = 0,\overline{1}_2}}$$

To co jsme zjistili je, že číslo jedna se dá zapsat dvěma způsoby. No to je ale bordel. Co je pak správné?

Nekonečný součet

Zkusím převést číslo $0,\overline{1}_2$ do desítkové soustavy:

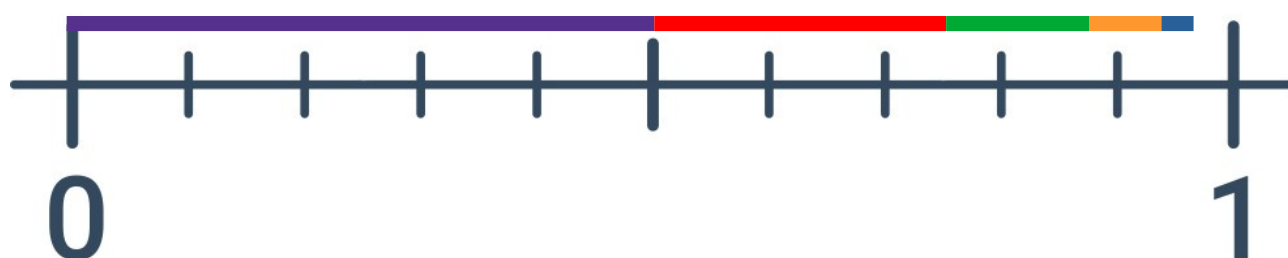
$$0,11111\dots_2 = 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + \dots$$

a zároveň vím, že $0,\overline{1}_2$ je jinak napsané jedna:

$$1 = 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + \dots$$

Tohle ukazuje, že když sečtu všechny ty zlomky, polovinu, čtvrtinu, osminu atd. tak mi vyjde jedna. Ale je jich nekonečně moc, to ani nejde sečíst. A stejně vím, že to vyjde jedna.

Ty zlomky můžu nakreslit na číselnou osu. A vidím, že se dohromady postupně blíží k jedničce. Každý další zlomek zabere půlku zbývajících volného místa.



Odbočka do desítkové soustavy

Ve dvojkové soustavě odpovídá jednička $0,1$. V desítkové soustavě by to mělo být $0,\overline{9}$. Hele:

$$\begin{array}{rcl} 1 : 9 & = & 1/9 = 0,1111\dots \\ 9/9 & = & 0,9999\dots \\ \underline{\underline{1}} & = & \underline{\underline{0,9999\dots}} \end{array} \quad / \cdot 9$$

Takže jednička se dá zapsat i jiným způsobem, jako $0,\overline{9}$. Jiná čísla jdou tímto působme taky zapsat. Na poslední pozici uberu jedničku a místo ní tam napíšu už jen devítky:

$$\begin{array}{ll} 2 = 1,\overline{9} & -7 = -6,\overline{9} \\ 513 = 512,\overline{9} & -30,22 = -30,21\overline{9} \\ 0,1 = 0,0\overline{9} & 0,\overline{3} \text{ nejde} \\ 0,8425 = 0,8424\overline{9} & 0 \text{ nejde} \end{array}$$

Nejdou takhle zapsat nekonečná čísla a nula.

Trojková soustava

Zápis čísla a převody

Ve trojkové soustavě se čísla skládají z mocnin tří: 1 3 9 27 81 atd. Číslo 1201 se přečte jedna dva nula jedna. Žádné tisíce a tak. Ve trojkové soustavě se používají tři číslice: 1, 2 a 0.

$$1201_3 = 1 \cdot 27 + 2 \cdot 9 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 27 + 18 + 1 = 46$$

Když chci převést číslo sedmdesát čtyři z desítkové soustavy do trojkové, tak se musím podívat, které mocniny tří se tam vejdou. Nejvyšší mocnina tří, co se vejde do čísla 74, je 27. Ale pozor, ona se tam vejde dvakrát. Zbude 20. Do dvacítky se vejde číslo 9 taky dvakrát a zbude 2, do dvojky se vejde 1 dvakrát. Zbude nula. Takže:

$$74 = 2 \cdot 27 + 2 \cdot 9 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 2202_3$$

Převádění dělením je rychlejší. Když chci číslo 135 převést do trojkové soustavy dělením, musím ho vydělit třema a napsat si zbytek. Výsledek pak zase vydělím třema a napíšu si zbytek. A tak dále, až je výsledek dělení 0. Převedené číslo napíšu odzadu ze zbytků:

$$135 = 12000_3$$

$$\begin{array}{rcl} 135 : 3 & = & 45 \text{ zb } 0 \\ 45 : 3 & = & 15 \text{ zb } 0 \\ 15 : 3 & = & 5 \text{ zb } 0 \\ 5 : 3 & = & 1 \text{ zb } 2 \\ 1 : 3 & = & 0 \text{ zb } 1 \end{array}$$

Počítání

Porovnávání, sčítání odčítání, dělení a násobení čísel se dělá stejně jako ve dvojkové, akorát ty tabulky jsou jiné:

sčítání	0	1	2
+ 0 =	0	1	2
+ 1 =	1	2	10
+ 2 =	2	10	11

násobení	0	1	2
· 0 =	0	0	0
· 1 =	0	1	2
· 2 =	0	2	11

Příklady ve trojkové soustavě:

$$\begin{array}{r} 200 \\ 2001 \\ \hline 2201 \end{array}$$

kontrola:
 $18 + 55 = 73$

$$\begin{array}{r} 12000 \\ -2021 \\ \hline 02202 \end{array}$$

kontrola:
 $135 - 61 = 74$

$$\begin{array}{r} 102 \\ \cdot 21 \\ \hline 102 \\ 2110 \\ \hline 2212 \end{array}$$

kontrola:
 $11 \times 7 = 77$

$$\begin{array}{r} 11211 : 101 = \underline{\underline{111}} \\ -101 \\ \hline 111 \\ -101 \\ \hline 101 \\ -101 \\ \hline 0 \end{array}$$

kontrola $130 : 10 = 13$

$$\begin{array}{r} 11110 : 12 = \underline{\underline{220}} \\ -101 \\ \hline 101 \\ -101 \\ \hline 00 \\ -0 \\ \hline 0 \end{array}$$

kontrola $120 : 5 = 24$

Některé vlastnosti čísel

Ve trojkové soustavě	
sudé číslo	obsahuje sudý počet jedniček v čísle
násobek tří	končí nulou
mocnina tří	jednička a nuly (10000)
o jedna větší než mocnina tří	jednička nuly a jednička (100001)
o jedna menší než mocnina tří	samé dvojky (22222)

Desetinná čísla

Desetinná místa slouží k vyjádření čísel menších než jedna, takže třetin, devítin, dvacetisedmin, osmdesátijednin... Ale vždyť to jsou třetiny a devítiny a ne desetiny, tak by se tomu mělo říkat "třetinná čárka" a "**třetinná čísla**", a ne desetinná. Ale já budu psát desetinná, abychom se chápali.

Ve trojkové soustavě: $0,21_3 = 2 \cdot 1/3 + 1/9$

Desetinné číslo převedu do trojkové soustavy tak, že zjistím, jakým dělením jsem k němu přišel v desítkové soustavě, a stejné dělení udělám ve trojkové:

$$\begin{array}{r} 0,3333\dots = 1 : 3 = 1 : 10_3 = \underline{\underline{0,1_3}} \\ \quad \quad \quad \underline{-0} \\ \quad \quad \quad 10 \\ \quad \quad \quad \underline{-10} \\ \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0,1111\dots = 1 : 9 = 1 : 100_3 = \underline{\underline{0,01_3}} \\ \quad \quad \quad \underline{-0} \\ \quad \quad \quad 10 \\ \quad \quad \quad \underline{-0} \\ \quad \quad \quad 100 \\ \quad \quad \quad \underline{-100} \\ \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1,5 = 3 : 2 = \mathbf{10_3} : 2_3 = \underline{\underline{1,1_3}} \\ \quad \quad \quad \underline{-2} \\ \quad \quad \quad \mathbf{10} \end{array} \quad \text{stejně číslo} = \text{opakování}$$

$$\begin{array}{r}
 0,2 = 1 : 5 = 1 : 12_3 = \underline{\underline{0,0121_3}} \\
 \underline{-0} \\
 10 \\
 \underline{-0} \\
 100 \\
 \underline{-12} \\
 110 \\
 \underline{-101} \\
 20 \\
 \underline{-12} \\
 10
 \end{array}
 \quad \text{stejné číslo = opakování}$$

Z příkladů je vidět, že neperiodická čísla v desítkové vyšla periodická v trojkové. A periodická v desítkové byla neperiodická ve trojkové. Takže se to náhodně prohazuje.

Číslo $0,\overline{1}_3$ a nekonečný součet

Ve trojkové soustavě by mělo jedničky odpovídat nekonečné číslo $0,\overline{2}_3$. Takže $0,\overline{1}_3$ by mělo být 0,5. Převedu 0,5 do trojkové soustavy a uvidím:

$$\begin{array}{r}
 0,5 = 1 : 2 = 0,\overline{1}_3 \\
 \underline{-0} \\
 10 \\
 \underline{-2} \\
 10
 \end{array}
 \quad \text{stejné číslo = opakování}$$

$0,\overline{1}_3$ je opravdu 0,5, takže když to vynásobím dvěma, tak mi vyjde, že $0,\overline{2}_3$ se rovná 1.

$$\begin{array}{r}
 0,5 = 0,1111\dots_3 \\
 \underline{\underline{1 = 0,2222\dots_3}}
 \end{array}
 \quad / \cdot 2$$

Jednička tedy jde zapsat dvěma způsoby. A to jdou i jiná čísla, která nejsou nula nebo nejsou nekonečná:

$$\begin{array}{l}
 120_3 = 112,\overline{2}_3 \\
 211_3 = 210,\overline{2}_3 \\
 2,2_3 = 2,1\overline{2}_3
 \end{array}$$

A zase když posčítám všechny desetinná místa v čísle $0,\overline{1}_3$, dostanu dohromady 0,5:

$$0,1111\dots_3 = 1/3 + 1/9 + 1/27 + 1/81\dots = 0,5$$

Čtyřková soustava

Zápis čísla a převody

Ve čtyřkové soustavě se čísla skládají z mocnin čtyř: 1 4 16 64 atd. Používají se číslice 1, 2, 3 a 0.

$$1302_4 = 64 + 3 \cdot 16 + 0 + 2 = 64 + 48 + 2 = 114$$

Když chci převést číslo sedmdesát čtyři z desítkové soustavy do čtyřkové, tak se musím podívat, které mocniny čtyř se tam vejdou. Nejvyšší mocnina čtyř, co se vejde do čísla 74, je 64. Zbude 10. Do desítky se vejde číslo 4 dvakrát a zbude 2, do dvojky se vejde 1 a dvakrát. Zbude nula. Takže:

$$74 = 64 + 10 = 64 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 1 = 1022_4$$

Když chci číslo 135 převést do čtyřkové soustavy dělením, musím ho vydělit čtyřmi a napsat si zbytek. Výsledek pak zase vydělím čtyřmi a napíšu si zbytek. A tak dále, až je výsledek dělení 0. Převedené číslo napíšu odzadu ze zbytků:

$$135 = 2013_4$$

$$\begin{array}{rcl} 135 : 4 & = & 33 \text{ zb } 3 \\ 33 : 4 & = & 8 \text{ zb } 1 \\ 8 : 4 & = & 2 \text{ zb } 0 \\ 2 : 4 & = & 0 \text{ zb } 2 \end{array}$$

Počítání

Porovnávání, sčítání odčítání, dělení a násobení čísel se dělá stejně jako ve dvojkové, akorát ty tabulky jsou jiné:

sčítání	0	1	2	3
+ 0 =	0	1	2	3
+ 1 =	1	2	3	10
+ 2 =	2	3	10	11
+ 3 =	3	10	11	12

násobení	0	1	2	3
· 0 =	0	0	0	0
· 1 =	0	1	2	3
· 2 =	0	2	10	12
· 3 =	0	3	12	21

Příklady ve čtyřkové soustavě:

$$\begin{array}{r} 123 \\ 2001 \\ \hline 2130 \end{array}$$

kontrola:
 $129 + 27 = 156$

$$\begin{array}{r} 130 \\ -22 \\ \hline 102 \end{array}$$

kontrola:
 $28 - 10 = 18$

$$\begin{array}{r} 102 \\ \cdot 32 \\ \hline 210 \\ 312 \\ \hline 3330 \end{array}$$

kontrola:
 $18 \cdot 14 = 252$

$$\begin{array}{r} 1310 : 2 = 322 \\ -12 \\ \hline 11 \\ -10 \\ \hline 10 \\ -10 \\ \hline 0 \end{array}$$

kontrola $116 : 2 = 58$

$$\begin{array}{r} 22203 : 21 = 1023 \\ -21 \\ \hline 12 \\ -0 \\ \hline 120 \\ -102 \\ \hline 123 \\ -123 \\ \hline 0 \end{array}$$

kontrola $675 : 9 = 75$

Některé vlastnosti čísel

Ve čtyřkové soustavě	
sudé číslo	končí nulou nebo dvojkou
násobek čtyř	končí nulou
mocnina čtyř	jednička a nuly (10000)
o jedna větší než mocnina čtyř	jednička nuly a jednička (100001)
o jedna menší než mocnina čtyř	samé trojky (33333)

Desetinná čísla

Desetinná ("čtvrtinná") místa slouží k vyjádření čtvrtin, šestnáctin, šedesátičtvrtin...

$$0,12_4 = 1/4 + 2/16 = 0,375$$

Desetinné číslo převedu do čtyřkové soustavy tak, že zjistím, jakým dělením jsem k němu přišel v desítkové soustavě, a stejné dělení udělám ve čtyřkové:

$$\begin{array}{r} 0,5 = 1 : 2 = \underline{0,2}_4 \\ \underline{-0} \\ 10 \\ \underline{-10} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0,2 = 1 : 5 = 1 : 11_4 = \underline{0,0\overline{3}}_4 \\ \underline{-0} \\ \mathbf{10} \\ \underline{-0} \\ 100 \\ \underline{-33} \\ \mathbf{10} \end{array} \quad \text{stejné číslo = opakování}$$

Číslo $0,1\overline{4}_4$ a nekonečný součet

Ve čtyřkové soustavě by mělo jedničky odpovídat nekonečné číslo $0,3\overline{4}_4$. Takže $0,1\overline{4}_4$ by mělo být $1/3$. Převedu $1/3$ do čtyřkové soustavy a uvidím:

$$\begin{array}{r} 1/3 = 1 : 3 = 0,1\overline{4}_4 \\ \underline{-0} \\ 10 \\ \underline{-3} \\ 10 \end{array} \quad \text{stejné číslo = opakování}$$

$0,1\overline{4}_4$ je opravdu $1/3$, takže když to vynásobím třemi, tak mi vyjde, že $0,3\overline{4}_4$ se rovná 1.

$$\begin{array}{r} 1/3 = 0,1111\dots_4 \\ \underline{1} = 0,3333\dots_4 \end{array} \quad / \cdot 3$$

A zase když počítám všechna desetinná místa v čísle $0,1\overline{4}_4$, dostanu dohromady $1/3$:

$$0,1111\dots_4 = 1/4 + 1/16 + 1/64 + 1/256\dots = 1/3$$

Pětková soustava

V pětkové soustavě se čísla skládají z mocnin pěti: 1, 5, 25, 125, 625 atd. Používají se číslice 1, 2, 3, 4 a 0.

$$1214_5 = 1 \cdot 125 + 2 \cdot 25 + 1 \cdot 5 + 4 \cdot 1 = 184$$

Když chci převést číslo sedmdesát čtyři z desítkové soustavy do pětkové, tak se musím podívat, které mocniny pěti se tam vejdou. Nejvyšší mocnina pěti, co se vejde do čísla 74, je 25, a to dvakrát. Zbude 24. Do dvacet čtyřky se vejde číslo 5 čtyřikrát a zbude 4, do čtyřky se vejde 1 čtyřikrát. Zbude nula. Takže:

$$74 = 2 \cdot 25 + 4 \cdot 5 + 4 \cdot 1 = 244_5$$

Taky můžu převádět rychle dělením pěti:

$$135 = 1020_5$$

$$\begin{array}{rcl} 135 & : & 5 = 27 \text{ zb } 0 \\ 27 & : & 5 = 5 \text{ zb } 2 \\ 5 & : & 5 = 1 \text{ zb } 0 \\ 1 & : & 5 = 0 \text{ zb } 1 \end{array}$$

Počítání

Porovnávání, sčítání, odčítání, dělení a násobení čísel se dělá stejně jako ve dvojkové, akorát ty tabulky jsou jiné:

sčítání	0	1	2	3	4
+ 0 =	0	1	2	3	4
+ 1 =	1	2	3	4	10
+ 2 =	2	3	4	10	11
+ 3 =	3	4	10	11	12
+ 4 =	4	10	11	12	13

násobení	0	1	2	3	4
· 0 =	0	0	0	0	0
· 1 =	0	1	2	3	4
· 2 =	0	2	4	11	13
· 3 =	0	3	11	14	22
· 4 =	0	4	13	22	31

Kam se podělo 10, 12, 21? V tabulce chybí. No jsou to prvočísla, takže se nezískají běžným násobením.

Příklady v pětkové soustavě:

$$\begin{array}{r} 243 \\ 1003 \\ \hline 1301 \end{array}$$

kontrola:
 $73 + 128 = 201$

$$\begin{array}{r} 440 \\ -22 \\ \hline 413 \end{array}$$

kontrola:
 $120 - 12 = 108$

$$\begin{array}{r} 132 \\ \cdot 24 \\ \hline 1133 \\ 3140 \\ \hline 4323 \end{array}$$

kontrola:
 $42 \cdot 14 = 588$

$$\begin{array}{r} 431 : 2 = 213 \\ -4 \\ \hline 03 \\ -2 \\ \hline 10 \\ -10 \\ \hline 0 \end{array}$$

kontrola $116 : 2 = 58$

$$\begin{array}{r} 10203 : 11 = 423 \\ -44 \\ \hline 30 \\ -22 \\ \hline 33 \\ -33 \\ \hline 0 \end{array}$$

kontrola $678 : 6 = 113$

Některé vlastnosti čísel

V pětkové soustavě	
sudé číslo	má sudý ciferný součet
násobek pěti	končí nulou
mocnina pěti	jednička a nuly (10000)
o jedna větší než mocnina pěti	jednička nuly a jednička (100001)
o jedna menší než mocnina pěti	samé čtyřky (444444)

Desetinná čísla

Desetinná ("pětinná") místa slouží k vyjádření pětín, dvacetipětín, stodvacetipětín...

$$0,04_5 = 4/25 = 0,16$$

Desetinné číslo převedu do pětkové soustavy tak, že zjistím, jakým dělením jsem k němu přišel v desítkové soustavě, a stejné dělení udělám v pětkové:

$$0,2 = 1 : 5 = 1 : 10_5 = \underline{\underline{0,1_5}}$$

$$\begin{array}{r} -0 \\ 10 \\ -10 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$0,3333\dots = 1 : 3 = \underline{\underline{0,1\overline{3}_5}}$$

$$\begin{array}{r} -0 \\ 10 \\ -3 \\ \hline 20 \\ -14 \\ \hline 10 \end{array} \quad \text{stejné číslo = opakování}$$

$$1,5 = 3 : 2 = \underline{\underline{1,2\overline{5}_5}}$$

$$\begin{array}{r} -2 \\ 10 \\ -4 \\ \hline 10 \end{array} \quad \text{stejné číslo = opakování}$$

Číslo $0,1\overline{5}_5$ a nekonečný součet

Ve pětkové soustavě by mělo jedničky odpovídat nekonečné číslo $0,4\overline{5}_5$. Takže $0,1\overline{5}_5$ by mělo být 0,25. Převedu 0,25 do pětkové soustavy a uvidím:

$$0,25 = 1 : 4 = 0,1\overline{5}_5$$

$$\begin{array}{r} -0 \\ 10 \\ -4 \\ \hline 10 \end{array} \quad \text{stejné číslo = opakování}$$

$0,1\overline{5}_5$ je opravdu 0,25, takže když to vynásobím čtyřmi, tak mi vyjde, že $0,4\overline{5}_5$ se rovná 1.

$$\begin{array}{l} 0,25 = 0,1111\dots_5 \quad / \cdot 4 \\ \underline{\underline{1 = 0,4444\dots_5}} \end{array}$$

A zase když počítám všechna desetinná místa v čísle $0,1\overline{5}_5$, dostanu dohromady 0,25:

$$0,1111\dots_5 = 1/5 + 1/25 + 1/125 + 1/625\dots = 0,25$$

Šestková soustava

V šestkové soustavě se čísla skládají z mocnin šesti: 1, 6, 36, 216... atd. Používají se číslice 1, 2, 3, 4, 5 a 0.

$$205_6 = 2 \cdot 36 + 0 \cdot 6 + 5 \cdot 1 = 77$$

Když chci převést číslo sedmdesát čtyři z desítkové soustavy do šestkové, tak se musím podívat, které mocniny šesti se tam vejdou. Nejvyšší mocnina šesti, co se vejde do čísla 74, je 36, a to dvakrát. Zbude 2. Do dvojky čtyřky jedna dvakrát a zbude nule. Takže:

$$74 = 2 \cdot 36 + 0 \cdot 6 + 2 \cdot 1 = 202_6$$

Taky můžu převádět rychle dělením šesti:

$$135 = 343_6$$

$$\begin{array}{rcl} 135 : 6 & = & 22 \text{ zb } 3 \\ 22 : 6 & = & 3 \text{ zb } 4 \\ 3 : 6 & = & 2 \text{ zb } 3 \end{array}$$

Počítání

Porovnávání, sčítání odčítání, dělení a násobení čísel se dělá stejně jako ve dvojkové, akorát ty tabulky jsou jiné:

sčítání	0	1	2	3	4	5
+ 0 =	0	1	2	3	4	5
+ 1 =	1	2	3	4	5	10
+ 2 =	2	3	4	5	10	11
+ 3 =	3	4	5	10	11	12
+ 4 =	4	5	10	11	12	13
+ 5 =	5	10	11	12	13	14

násobení	0	1	2	3	4	5
· 0 =	0	0	0	0	0	0
· 1 =	0	1	2	3	4	5
· 2 =	0	2	4	10	12	14
· 3 =	0	3	10	13	20	23
· 4 =	0	4	12	20	24	32
· 5 =	0	5	41	23	32	41

Kam se podělo 11, 15, 21...? V tabulce chybí. No jsou to prvočísla, takže se nezískají běžným násobením.

Příklady v šestkové soustavě:

$$\begin{array}{r} 404 \\ + 523 \\ \hline 1331 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 204 \\ - 25 \\ \hline 135 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 52 \\ \cdot 23 \\ \hline 240 \\ + 1440 \\ \hline 2120 \end{array}$$

kontrola:
 $148 + 195 = 343$

kontrola:
 $76 - 17 = 59$

kontrola:
 $32 \cdot 15 = 480$

$$\begin{array}{r} 320 : 4 = 50 \\ - 32 \\ \hline 00 \\ - 0 \\ \hline 0 \end{array}$$

kontrola: $120 : 4 = 30$

$$\begin{array}{r} 23230 : 14 = 1313 \\ - 14 \\ \hline 52 \\ - 50 \\ \hline 23 \\ - 14 \\ \hline 50 \\ - 50 \\ \hline 0 \end{array}$$

kontrola: $3330 : 10 = 333$

Některé vlastnosti čísel

V šestkové soustavě	
sudé číslo	končí sudým číslem
násobek šesti	končí nulou
mocnina šesti	jednička a nuly (10000)
o jedna větší než mocnina šesti	jednička nuly a jednička (100001)
o jedna menší než mocnina šesti	samé pětky (555555)

Desetinná čísla

Desetinná ("šestinná") místa slouží k vyjádření šestin, třicetišestin, dvěstěšestnáctin...

$$0,32_6 = 3 \cdot 1/6 + 2 \cdot 1/36 = 1/2 + 1/18 = 9/18 + 1/18 = 10/18 = 5/9$$

Desetinné číslo převedu do šestkové soustavy tak, že zjistím, jakým dělením jsem k němu přišel v desítkové soustavě, a stejné dělení udělám v šestkové:

$$\begin{array}{r} 0,4 = 2 : 5 = \underline{\underline{0,2_6}} \\ \underline{-0} \\ 20 \\ \underline{-14} \\ 20 \end{array} \quad \text{stejné číslo = opakování}$$

$$\begin{array}{r} 0,333\dots = 1 : 3 = \underline{\underline{0,2_6}} \\ \underline{-0} \\ 10 \\ \underline{-10} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1,5 = 3 : 2 = \underline{\underline{1,3_6}} \\ \underline{-2} \\ 10 \\ \underline{-10} \\ 0 \end{array}$$

Číslo $0,1_6$ a nekonečný součet

V šestkové soustavě by mělo jedničky odpovídat nekonečné číslo $0,5_6$. Takže $0,1_6$ by mělo být $1/5$. Převedu $1/5$ do šestkové soustavy a uvidím:

$$\begin{array}{r} 1/5 = 1 : 5 = 0,1_6 \\ \underline{-0} \\ 10 \\ \underline{-5} \\ 10 \end{array} \quad \text{stejné číslo = opakování}$$

$0,1_6$ je opravdu $1/5$, takže když to vynásobím pěti, tak mi vyjde, že $0,5_6$ se rovná 1.

$$\begin{array}{r} 1/5 = 0,1111\dots_6 \\ 1 = \underline{\underline{0,5555\dots_6}} \end{array} \quad / \cdot 5$$

A zase když počítám všechna desetinná místa v čísle $0,1_6$, dostanu dohromady $1/5$:

$$0,1111\dots_6 = 1/6 + 1/36 + 1/216\dots = 1/5$$

Eridiané

Eridiané jsou mimozemšťané z knihy Spasitel od Andyho Weira. Tito mimozemšťané počítají v šestkové soustavě, protože mají pět nohou a na každé tři prsty. Třema nohama stojí na zemi a dvěma počítají. Mají jiné číslice než lidi:

lidsky	0	1	2	3	4	5
eridiansky	ℓ	I	V	λ	+	∇

Příklady v eridianských číslicích:

$$\begin{array}{r}
 \lambda \nabla \lambda \nabla : I + = \nabla \ell \nabla \\
 \underline{-\lambda \nabla} \\
 \ell \lambda \\
 \underline{-\ell} \\
 \lambda \nabla \\
 \underline{-\lambda \nabla} \\
 \ell
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \nabla \nabla \ell \\
 \underline{I + \lambda \lambda} \\
 \nabla \lambda \nabla \lambda
 \end{array}$$

Šestnáctková soustava

Nebudu psát všechno jako v jiných soustavách, protože je to všechno moc velké a složité. Začnu číslicemi. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ale ony už došly číslice, tak se použijí **písmena**: 10 = A, 11 = B, 12 = C, 13 = D, 14 = E a 15 = F.

$$A05F_{16} = 10 \cdot 4096 + 0 \cdot 256 + 5 \cdot 16 + 15 \cdot 1 = 41055$$

V šestnáctkové soustavě	
sudé číslo	končí sudým číslem
násobek šestnácti	končí nulou
mocnina šestnácti	jednička a nuly (10000)
o jedna větší než mocnina šestnácti	jednička nuly a jednička (100001)
o jedna menší než mocnina šestnácti	samé patnáctky = efka (FFFFFF)

Číslo $0,\overline{1}_{16}$ a nekonečný součet

V šestnáctkové soustavě by mělo jedničky odpovídat nekonečné číslo $0,\overline{F}_{16}$.

Takže $0,\overline{1}_{16}$ by mělo být $1/F = 1/15$. Převeďme $1/15$ do šestnáctkové soustavy a uvidíme:

$$\begin{array}{r} 1/15 = 1 : F = 0,\overline{1}_{16} \\ \underline{-0} \\ 10 \\ \underline{-F} \\ 10 \end{array} \quad \text{stejné číslo} = \text{opakování}$$

$0,\overline{1}_{16}$ je opravdu $1/15$, takže když to vynásobím patnácti (F), tak mi vyjde, že $0,\overline{F}_{16}$ se rovná 1.

$$\begin{array}{r} 1/15 = 0,1111\dots_{16} \\ \underline{1} = 0,\overline{FFFF}\dots_{16} \end{array} \quad / \cdot 15 \quad (F)$$

A zase když počítám všechna desetinná místa v čísle $0,\overline{1}_{16}$, dostanu dohromady $1/15$:

$$0,1111\dots_{16} = 1/16 + 1/256 + 1/4096 + \dots = 1/15$$

Shrnutí

Co závisí na soustavě?

- | | | |
|----------------|---------------|--|
| ANO | NE | jestli je číslo zapsané dlouhou nebo krátkou řadou číslic |
| ANO | NE | jestli je číslo sudé |
| ANO | NE | jestli je jedno číslo trojnásobkem druhého |
| ANO | NE | jestli je číslo celé, anebo desetinné |
| ANO | NE | kolik vychází součet dvou nějakých čísel |
| ANO | NE | jestli je desetinné číslo konečné, anebo nekonečné |
| ANO | NE | jestli je číslo symetrické (odzadu se čte stejně jako odpředu) |
| ANO | NE | jestli je číslo prvočíslo |
| ANO | NE | jestli jde jedno číslo druhým vydělit beze zbytku |
| ANO | NE | které z dvojice čísel je větší |
| ANO | NE | jestli má číslo všechny číslice stejné |

Na soustavě závisí zápis čísla, prostě jak to číslo vypadá. A na soustavě nezávisí vlastnosti čísla (počtu). Jako věci, které se dají ukázat pomocí kuliček.

Na soustavě taky závisí, jestli je desetinné číslo konečné, či nekonečné. A počítače, když počítají ve dvojkové soustavě, převádí naše konečná čísla na jejich nekonečná a tak kvůli zaokrouhlování jim vycházejí malinko jiná čísla. Ale my si můžeme nastavit jak přesně ten výsledek chceme.

Co mají všechny soustavy společného?

- číslice 0 a 1
- desetinnou čárku
- sčítání, odčítání, násobení a dělení
- porovnávání čísel
- když násobím jedničkou zůstává číslo stejné
- když přičítám nulu zůstává číslo stejné
- všechna konečná čísla kromě nuly jdou zapsat dvěma způsoby - nekonečně a konečně

Nekonečné součty

Při počítání mi vyšly tyhle nekonečné součty:

$$0,1111\dots_2 = 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \dots = 1 = \mathbf{1/1}$$

$$0,1111\dots_3 = 1/3 + 1/9 + 1/27 + 1/81 + \dots = 0,5 = \mathbf{1/2}$$

$$0,1111\dots_4 = 1/4 + 1/16 + 1/64 + 1/256 + \dots = \mathbf{1/3}$$

$$0,1111\dots_5 = 1/5 + 1/25 + 1/125 + 1/625 + \dots = 0,25 = \mathbf{1/4}$$

$$0,1111\dots_6 = 1/6 + 1/36 + 1/216 + \dots = \mathbf{1/5}$$

$$0,1111\dots_{10} = 1/10 + 1/100 + 1/1000 + \dots = \mathbf{1/9}$$

$$0,1111\dots_{16} = 1/16 + 1/256 + 1/4096 + \dots = \mathbf{1/15}$$

Když to řeknu pro všechny soustavy dohromady: Číslo $0,1111\dots_n$ v soustavě o základu n vychází v desítkové soustavě jako $\mathbf{1/(n-1)}$. Zjistí se to písemným dělením.

Takže nekonečný součet $\mathbf{1/n + 1/n \cdot n + 1/n \cdot n \cdot n + \dots}$ se taky rovná $\mathbf{1/(n-1)}$.

$$\mathbf{1/(n-1) = 0,1111\dots_n = 1/n + 1/n \cdot n + 1/n \cdot n \cdot n + \dots}$$

A to platí pro jakoukoli soustavu o základu větším než 1. Například:

$$1/7 + 1/49 + 1/343 + \dots = 1/6$$

$$1/327 + 1/106929 + 1/34965783 + \dots = 1/326$$

$$1/11 + 1/121 + 1/1331 + 1/14641 + \dots = 1/10 = 0,1$$

V tabulkovém editoru jsem si zkusil sečíst prvních deset zlomků v té jedenáctkové řadě. A vyšlo mi skoro 0,1 už po desátém členu:

mocnina 11	1 : mocnina 11	součet členů
11	0,090909090909	
121	0,008264462810	0,099173553719
1331	0,000751314801	0,099924868520
14641	0,000068301346	0,099993169865
161051	0,000006209213	0,099999379079
1771561	0,000000564474	0,099999943553
19487171	0,000000051316	0,099999994868
214358881	0,000000004665	0,099999999533
2357947691	0,000000000424	0,099999999958
25937424601	0,000000000039	0,099999999996

skoro 0,1

Zkusím spočítat nekonečný součet i v "jedničkové" soustavě (pro $n = 1$). Je to blbost, protože jedničková poziční soustava neexistuje, ale uvidím, co to udělá:

$$1/1 + 1/1 \cdot 1 + 1/1 \cdot 1 \cdot 1 + \dots = 1/(1-1)$$

$$1 + 1 + 1 + \dots = 1/0$$

Vlevo je součet nekonečně mnoha jedniček. Vpravo je jedna děleno nulou, ale to se nesmí. My si to však uděláme jako jedna děleno hrozně malé číslo.:

$$\text{nekonečně jedniček} = \text{jedna děleno hrozně maličké číslo}$$

Součet jedniček se rovná nekonečno a jedna děleno hrozně malým číslem je taky nekonečno. Ale to hrozně malé číslo musí být kladné. Když bude záporné, tak to vyjde mínus nekonečno. Takže to vlastně funguje (rovná se) jen napůl.

Závěr

V této práci jsem počítal v jiných soustavách. Přicházel jsem na jejich zákonitosti a porovnával jejich zajímavé výsledky.

- Procvičil jsem si písemné počítání (hlavně dělení)
- Naučil jsem se, že jde docela jednoduše počítat v jiné soustavě.
- Naučil jsem se sečíst víc čísel než umím napsat.
- Naučil jsem se udělat soustavu o základu vyšším než deset (používají se písmena).
- Procvičil jsem si mocniny.
- Naučil jsem se, že jde udělat něco jako dělení nulou.

Byla to hodně dlouhá práce, ale nakonec jsem ji dodělal. Bylo to trochu jako pohádka, protože jsem ten text jednou napsal a pak jsem ho jen kopíroval a přepisoval pro každou soustavu. Takže pohádka, protože pohádky začínají stejně, končí stejně a probíhají podobně, jen se mění ten příběh.